

集中講義 Intensive Course

ラグランジュ-ガレルキン法(特性曲線有限要素法)の数値解析 Numerical analysis of Lagrange–Galerkin methods

野津裕史 (金沢大学・数物科学系)

Hirofumi Notsu (Faculty of Mathematics and Physics, Kanazawa University)

期間：2019 年 10 月 15–18 日

Period: October 15–18, 2019

場所：東京大学大学院数理科学研究科

Place: Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

概要 有限要素法 (FEM) は工学で最も広く用いられている計算手法のひとつである。この講義では、流れ問題のための特性曲線法と FEM を組み合わせた ラグランジュ-ガレルキン (LG) 法を紹介し、理論的背景や実装におけるキーポイントを学ぶ。LG 法は、時間微分項と移流項を合わせた物質微分を、流体粒子の軌跡 (ラグランジュ座標) に沿って離散化するアイデアに基づいており、故に、物理的視点から自然な解法である。さらに、得られる連立一次方程式の係数行列が対称かつ不変であり、CG 法 (共役勾配法) などの対称疎行列用反復法を用いることができる。本講義では、移流拡散方程式、ストークス方程式、オseen 方程式、ナビエ-ストークス方程式で支配される流れ問題を扱い、LG 法の安定性と収束性 (誤差評価) を示す。キーワードは、有限要素法、ラグランジュ-ガレルキン法、時間 1 次・2 次精度、質量保存性、安定化有限要素法、数値積分 である。講義は日本語 (板書は英語) で行う予定。成績は出席とレポートによって決定する。

Abstract The finite element method (FEM) is one of the most widely used computational methods in engineering. In this course, we introduce Lagrange–Galerkin (LG) methods for flow problems, which are FEMs combined with the idea of the method of characteristics, and study theoretical background and key issues in the implementation. The LG method is based on an approximation of the material derivative(, i.e., the sum of time-derivative term and convection term,) along the trajectory of the fluid particle (Lagrangian coordinates), and is natural from the physical point of view. Moreover, the resulting coefficient matrix for the system of linear equations is symmetric and identical, and iterative linear solvers for symmetric sparse matrices, e.g., the conjugate gradient method, can be employed. We deal with flow problems governed by convection-diffusion, Stokes, Oseen, and Navier–Stokes equations, and prove stability and convergence with error estimates of LG methods. The keywords of this course are as follows: Finite element method, Lagrange–Galerkin method, first- and second-order in time, conservation of mass, stabilized FEM, and numerical integration. We plan to give this course in Japanese (but write on blackboard in English). The grade will be decided based on the attendance rate and reports.