

# 集中講義 (2019年10月7日～10月11日)

## 平均次元入門

塚本 真輝 (九州大学)

1999年にグロモフによって定義された平均次元と呼ばれる力学系の位相不変量について入門的な講義を行う。力学系とはコンパクト距離空間  $X$  と同相写像  $T: X \rightarrow X$  の組  $(X, T)$  であり、平均次元は力学系が単位時間あたりに持つ自由度を表す。例えば、単位区間  $[0, 1]$  の無限直積

$$[0, 1]^{\mathbb{Z}} = \cdots \times [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \times \cdots$$

を考えよう。この上にはシフト  $\sigma: [0, 1]^{\mathbb{Z}} \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{Z}}$

$$\sigma((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$$

を考えることができる。この力学系  $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$  の平均次元は1である。直観的に述べると、 $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$  は毎秒ごとに1自由度を持つ。

次が講義の計画である。

- (1) まず平均次元の定義を説明し、上記  $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$  の平均次元をどうやって計算するか等の基本的な事柄を説明する。

- (2) 平均次元が他のどのようなテーマと関連するのかを概観する。

キーワード：位相的エントロピー、位相力学系の圧縮の問題、expansive な力学系に関するマニエの定理の群作用への一般化、レート歪み理論、正則曲線に対するネヴァンリンナ理論。

もちろん、これらのテーマを全部解説することは不可能なので、参加者が興味を持ちそうなものをいくつか選んで、どんなことが知られているのかを軽く概観する予定である。ただ、次の(3)を一番メインに説明したいと思っているので、もし時間がなさそうなら、この(2)は割愛する。

- (3) 次に、力学系の埋め込み問題への平均次元の応用を話す。これは、一般的な力学系  $(X, T)$  が、いつ上記の  $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$  に埋め込めるかを問う問題である。この問題は1970年代にヤウオースキによって始められ、1999年にリンデンシュトラウスとヴァイスによって、平均次元との深い関わりが明らかにされた。そして数年前にグットマンと私によって、極小な力学系に対しては、問題は完全に理解された。この発展の中で、力学系の埋め込み問題がシャノンによる帯域制限された通信の理論の位相力学系における類似であることも分かった。このあたりの事情をある程度証明まで踏み込みながら説明したい。