平成３１年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

平成３０年　８月　２８日（火）
１１：００　～　１５：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第1問

p を素数, $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ を位数 p の有限体とし, $\mathbf{F}_p[X]$ を $\mathbf{F}_p$ 上の 1 変数多項式環とする. 集合 S を次のように定める.

$$S = \{A \subseteq \mathbf{F}_p[X] \mid A \text{ は単位元を含む部分環, かつ } \dim_{\mathbf{F}_p} \mathbf{F}_p[X]/A = 1\}.$$

ただし, $\dim_{\mathbf{F}_p} \mathbf{F}_p[X]/A$ は $\mathbf{F}_p[X]/A$ の $\mathbf{F}_p$ 線型空間としての次元である.

(1) S が有限集合であることを示し, その元の個数を求めよ.

(2) S の元として現れる環の同型類の個数を求めよ.

B 第2問

a, b, c を 1 以上の整数とする. このとき多項式 $X^a + Y^b + Z^c \in \mathbf{C}[X, Y, Z]$ は既約であることを示せ.

B 第3問

$E = \mathbf{C}(x, y, z)$ を $\mathbf{C}$ 上の 3 変数有理関数体とし, その部分体 $F = \mathbf{C}(x^2y, y^2z, z^2x)$ を考える. また, 変数 x, y, z に関して対称な有理式全体のなす E の部分体を L とし, $K = L \cap F$ とする.

(1) E は F の有限次ガロア拡大であることを示し, そのガロア群 $\mathrm{Gal}(E/F)$ を求めよ.

(2) E の K 上の拡大次数を求めよ.

(3) $K \subset L$ の中間体の個数を求めよ.

B 第4問

集合 $\{1, 2, 3\}$ の置換からなる 3 次対称群 S_3 の 1 変数有理関数体 $\mathbf{C}(z)$ への作用 ρ が, $\rho(s_1)f(z) = f(1-z)$, $\rho(s_2)f(z) = f(\frac{1}{z})$ を満たしているとする. ただし, s_1 は 1 と 2 の互換, s_2 は 2 と 3 の互換を表す. 元 $z \in \mathbf{C}(z)$ を含み, ρ で安定な $\mathbf{C}(z)$ の最小の $\mathbf{C}$ 線型部分空間を V とする.

(1) V の基底を一つ与えよ. また ρ で不変な V 上のエルミート内積の一つをこの基底に関するグラム行列として表示せよ. ここでエルミート内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ に関するグラム行列とは, $(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}$ で定まる n 次正方行列のことである.

(2) ρ で安定な V の $\mathbf{C}$ 線型部分空間のうち, $\{0\}$ を除いて極小なものをすべて求めよ.

(3) ρ と可換な V から V への $\mathbf{C}$ 線型写像全体のなす線型空間の次元を求めよ.

B 第 5 問

v をユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ の単位ベクトルとする. 3 次元実射影空間 $\mathbf{R}P^3$ 上の C^∞ 級関数 $f_v\colon \mathbf{R}P^3 \to \mathbf{R}$ を次のように定める. $\mathbf{R}^4$ 内の原点を通る直線 l に対して, v の l への直交射影と v の内積を $f_v(l)$ とする. また, C_v を f_v の臨界点全体のなす $\mathbf{R}P^3$ の部分空間とする. ただし, $\mathbf{R}P^3$ は $\mathbf{R}^4$ 内の原点を通る直線全体のなす集合とみなす.

(1) $f_v^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ は $\mathbf{R}P^3$ の部分多様体であり, 2 次元球面 S^2 と微分同相であることを示せ.

(2) C_v の各連結成分は $\mathbf{R}P^3$ の部分多様体であることを示せ.

(3) $p \in C_v$ とし, p を含む C_v の連結成分の部分多様体としての次元を d とする. このとき, 次の条件 (i), (ii) を満たす C^∞ 級埋め込み $\iota\colon \mathbf{R}^{3-d} \to \mathbf{R}P^3$ が存在することを示せ.

(i) $\iota(\mathbf{0}) = p$.

(ii) ヘッセ行列 $\left(\dfrac{\partial^2(f_v \circ \iota)}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{0})\right)_{1 \leq i,j \leq 3-d}$ は正則である.

ただし, $\mathbf{0}$ は $\mathbf{R}^{3-d}$ の原点とする.

B 第 6 問

写像 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ を

$$f(u,v) = (v\cos u, v\sin u, e^u)$$

で定める. f によってパラメータ表示される曲面を S とおく. 曲面 S 上のなめらかな曲線 $\gamma(t)$ が漸近曲線であるとは, 加速度ベクトル $\gamma''(t)$ がつねに曲面 S に接することと定義する.

(1) 曲面 S 上のなめらかな曲線 $\gamma(t)$ を, 関数 $u(t), v(t)$ を用いて

$$\gamma(t) = f(u(t), v(t))$$

と表示する. 曲線 $\gamma(t)$ が漸近曲線であるための条件を $u(t), v(t)$ についての微分方程式で表せ.

(2) 曲面 S の任意の点 p について, p を通る 2 つの漸近曲線で, p における速度ベクトルが互いに 1 次独立であるものが存在することを示せ. 特に, $p = (1,0,1)$ のとき, p を通るこのような 2 つの漸近曲線を求めよ.

B 第 7 問

(1) ユークリッド空間 $\mathbf{R}^5$ の部分空間

$$X = \left\{ (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^5 \,\middle|\, \begin{array}{l} {x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = 1, \\ {x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 - {x_4}^2 = 0 \end{array} \right\}$$

について整係数ホモロジー群 $H_*(X; \mathbf{Z})$ を求めよ.

(2) 4 次元実射影空間 $\mathbf{R}P^4$ の部分空間

$$Y = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbf{R}P^4 \mid {x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 - {x_4}^2 = 0\}$$

について整係数ホモロジー群 $H_*(Y; \mathbf{Z})$ を求めよ.

B 第 8 問

$\mathbf{R}^4$ の元 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ を $\mathbf{C}^2$ の元 $\begin{pmatrix} \xi_1 + i\xi_2 \\ \xi_3 + i\xi_4 \end{pmatrix}$ に対応させることにより, $X = \mathbf{C}^2$ を $\mathbf{R}^4$ と同一視し, 以下のように 3 次元球面 S^3 を

$$\left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 + i\xi_2 \\ \xi_3 + i\xi_4 \end{pmatrix} \in X \,\middle|\, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in \mathbf{R},\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 1 \right\}$$

と実現する. ここで, i は虚数単位である. C^∞ 級写像 $\varphi\colon \mathbf{R}^3 \to X$ を次の式で定める.

$$\varphi(x, y, z) = \exp \begin{pmatrix} ix & -y + iz \\ y + iz & -ix \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) φ の像は S^3 であることを示せ.

(2) φ を $\mathbf{R}^3$ から S^3 への写像としてみたとき, φ の臨界点を決定せよ.

(3) X 上の 3 次微分形式 ω を

$$\omega = \xi_1 d\xi_2 \wedge d\xi_3 \wedge d\xi_4 - \xi_2 d\xi_1 \wedge d\xi_3 \wedge d\xi_4 + \xi_3 d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_4 - \xi_4 d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3$$

とおく. $R > 0$ に対して以下の積分を計算せよ.

$$\int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \varphi^*(\omega).$$

ここで $\mathbf{R}^3$ の向きは $dx \wedge dy \wedge dz$ が正となるものとする.

B 第 9 問

$\Omega = [0,\infty)$ とおく． 関数 $\varphi : \Omega \to \Omega$ は Ω 上連続で, $(0,\infty)$ 上 C^1 級とし, $\inf_{x\in(0,\infty)} \varphi'(x) > 0$ とする．Ω 上の関数 f に対し, Ω 上の関数 Tf を $Tf = f\circ\varphi$ で定める．ルベーグ測度に関する, Ω 上の実数値二乗可積分関数からなる実ヒルベルト空間を $L^2(\Omega)$ で表し, I で $L^2(\Omega)$ 上の恒等作用素を表す.

(1) T は $L^2(\Omega)$ 上の有界線型作用素を定めることを示せ.

(2) $\varphi(0) \neq 0$ とし, 任意の $x \in (0,\infty)$ に対し $\varphi'(x) \geq 1$ が成り立つとする．さらに, 有限な極限 $\alpha = \lim_{x\to\infty} \varphi'(x)$ が存在するとする．$|\lambda| < \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ を満たす任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ に対し, $L^2(\Omega)$ 上の線型作用素 $T - \lambda I$ は単射でないことを示せ.

(3) $\varphi(x) = e^x - 1$ のとき, $L^2(\Omega)$ 上の線型作用素 $T - I$ は有界な逆作用素をもたないことを示せ.

B 第 10 問

$\mathbf{R}^2$ のある領域で定義された C^2 級関数 $u(x)$ $(x=(x_1,x_2))$ に関する微分方程式

$$\text{(I)}\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+2{x_1}^2-2x_1x_2+{x_2}^2=1$$

を考える.

(1) $a_k(x,p)$, $b_l(x,p)$ $(k,l=1,2)$ を $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$, $p=(p_1,p_2)\in\mathbf{R}^2$ の C^∞ 級関数とし, $p(x)=(p_1(x),p_2(x))$ $(x=(x_1,x_2))$ についての連立 1 階偏微分方程式

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} a_1(x,p)\dfrac{\partial p_1}{\partial x_1}+a_2(x,p)\dfrac{\partial p_1}{\partial x_2}=b_1(x,p), \\[2ex] a_1(x,p)\dfrac{\partial p_2}{\partial x_1}+a_2(x,p)\dfrac{\partial p_2}{\partial x_2}=b_2(x,p) \end{cases}$$

が与えられたとする. (II) に対して, 常微分方程式系

$$\text{(III)}\qquad \frac{dx_k}{dt}=a_k(x,p),\qquad \frac{dp_l}{dt}=b_l(x,p)\quad (k,l=1,2)$$

を特性微分方程式と呼ぶ. 方程式 (I) の解 u に対し, 偏導関数を $p_1=\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, $p_2=\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ とおいたとき, p_1,p_2,x_1,x_2 が満たす (II) の形の方程式を求めよ. さらに, その特性微分方程式を求めよ.

(2) (1) で求めた (III) の形の特性微分方程式の保存量のうち, p_1,p_2,x_1,x_2 に関する 2 つの斉次 2 次式で 1 次独立なものを一組求めよ. ただし, (III) の保存量とは, p_1,p_2,x_1,x_2 の定数でない関数であって, 微分方程式 (III) のどのような解 $p_1(t),p_2(t),x_1(t),x_2(t)$ を代入しても, 値が時間 t によらないもののことである.

(3) 2 つの独立な積分定数を含む (I) の解を一つ構成せよ.

B 第 11 問

複素平面内で実軸上を $-\infty$ から -1 へ進む路を C_1, 単位円周上を反時計回りに一周して -1 から -1 へ戻る路を C_2, 実軸上を -1 から $-\infty$ へ進む路を C_3 とし, これらを C_1 から順につなげた路を $C = C_1 + C_2 + C_3$ とする. $a \in \mathbf{R}$ を定数とし, $z \in D = \{z \in \mathbf{C} \mid \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ とする.

$$f(z) = \int_C w^{-a-1} e^{z(w-\frac{1}{w})}\, dw$$

とおく. ただし $w^{-a-1} = e^{-(a+1)\mathrm{Log}\, w}$ とし, $\mathrm{Log}\, w$ の分枝は $U = \mathbf{C} \setminus \{w \in \mathbf{R} \mid w \leq 0\}$ 上で $-\pi < \mathrm{Im}\,(\mathrm{Log}\,(w)) < \pi$, C_1 上で $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Log}\,(w)) = -\pi$, C_3 上で $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Log}\,(w)) = \pi$ となるものとする.

(1) $f(z)$ は D 上の正則関数を定めることを示せ.

(2) D 上の正則関数 $\dfrac{f(z)}{z^a}$ は $\mathbf{C}$ 上の正則関数に解析接続されることを示せ. ただし $z^a = e^{a\mathrm{Log}\, z}$ とし, $\mathrm{Log}\, z$ の分枝は D で $-\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Im}\,(\mathrm{Log}\,(z)) < \dfrac{\pi}{2}$ となるものとする.

B 第 12 問

$I=[0,1]$ とする．I 上のルベーグ可測集合全体を $\mathfrak{M}$, ルベーグ測度を μ と書く．また, 1 以上の整数全体を $\mathbf{Z}^+$ と書くことにする．

(1) $A \in \mathfrak{M}$ が $\mu(A) > 0$ を満たすとする．$A_t = A \cap [0,t]$ $(0 \leq t \leq 1)$ とおく．$\mu(A_t) = \dfrac{1}{2}\mu(A)$ となる t が存在することを示せ．

(2) $A \in \mathfrak{M}$ が $\mu(A) > 0$ を満たすとする．$B_n \in \mathfrak{M}$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$ で 次のすべてを満たすものが存在することを示せ．

$$\mu(B_n) > 0 \ \ (n \in \mathbf{Z}^+), \quad B_n \cap B_m = \emptyset \ \ (n, m \in \mathbf{Z}^+, n \neq m), \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

(3) $f(x)$ を I 上の $[0,\infty]$ 値ルベーグ可測関数とする．$f(x) = \infty$ $\mu\text{-}a.e.x$ となることは I に含まれる任意のルベーグ測度正の集合 A に対して, $\displaystyle\int_A f(x)d\mu(x) \geq 1$ となることと同値であることを示せ．

(4) $A \in \mathfrak{M}$ とする．二乗可積分な実数値ルベーグ可測関数 $f(x)$ について

$$\left(\int_A f(x)d\mu(x)\right)^2 \leq \mu(A)\int_A f(x)^2 d\mu(x)$$

を示せ． ここで実数値ルベーグ可測関数 $f(x)$ が二乗可積分であるとは, $\displaystyle\int_I f(x)^2 d\mu(x) < \infty$ を満たすことである．

(5) I 上の μ に関して二乗可積分な実数値ルベーグ可測関数からなるヒルベルト空間を $L^2(I)$ とする．I 上の実数値関数列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $L^2(I)$ の完全正規直交系をなすとする．このとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e_n(x)^2 = \infty$ $\mu\text{-}a.e.x$ を示せ．

B 第 13 問

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の平均が 0, 分散が 1 の 1 次元正規分布に従う独立確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. また, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正数列で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ を満たすとし, $\displaystyle S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i(X_i^2 - 1)$ と定める.

(1) 確率変数 $X_1^2 - 1$ の平均, 分散および分布の確率密度関数を求めよ. ただし, 結果のみを書いてよい.

(2) 確率変数 S_2 の分布の台を求めよ. ただし, 実数値確率変数 X の分布の台とは

$$\{a \in \mathbf{R} \mid \forall \epsilon > 0 \;\; P(|X - a| < \epsilon) > 0\}$$

で定まる集合である。

(3) 確率変数 S が存在して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} E[|S_n - S|^2] = 0$ となることを示せ.

(4) (3) で得られた S_n の極限の確率変数 S を考える. S の分布の台が実数全体の集合となるための $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対する必要十分条件を求めよ.

B 第 14 問

次の 2 階の線形常微分方程式 $(\sharp)$ について以下の問に答えよ.

$$(\sharp) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}(x) - xy(x) = 0.$$

(1) $(\sharp)$ の一般解を, $x = 0$ のまわりでの冪級数展開によって求めよ.

(2) 次の形の複素線積分によって表される関数を考える.

$$y(x) = \int_C v(\zeta) e^{-x\zeta}\, d\zeta.$$

これが $(\sharp)$ の 2 つの非自明な独立な解となるような $v(\zeta)$ と 2 つの積分路 C を与えよ. また, x を正の実数とするとき, 各々の積分路に対する解の $x \to +\infty$ における近似形を鞍点法を用いて求めよ.

B 第 15 問

q 状態ポッツ模型と呼ばれる．以下のような 1 次元の統計力学の模型を考える．ただし，$q \geq 2$ と $N \geq 1$ はともに整数で，β は実数とする．

直線上に並んだ各格子点 i $(0 \leq i \leq N)$ には，$C = \{1, 2, \ldots, q\}$ に値をとるスピン変数 $S(i)$ が配置されている．$a, b \in C$ が与えられたとき，系の分配関数を，両端点のスピンの値を $S(0) = a$, $S(N) = b$ と固定し，それ以外のスピン変数について和をとったもの

$$z_N(a, b; \beta) = \begin{cases} \sum_{S(1)\in C} \sum_{S(2)\in C} \cdots \sum_{S(N-1)\in C} \exp\Big(\beta \sum_{i=1}^{N} \delta_{S(i-1),S(i)}\Big) & (N > 1) \\ \exp\Big(\beta\delta_{a,b}\Big) & (N = 1) \end{cases}$$

で定義する．ただし，$\delta_{x,y} \in \{0, 1\}$ はクロネッカーのデルタを表す．また，$Z_N(\beta)$ で $z_N(a, b; \beta)$ を (a, b) 成分とする $q \times q$ 行列を表すことにする．

(1) 熱力学的極限における 1 格子点あたりの自由エネルギー

$$F(\beta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \mathrm{tr} Z_N(\beta)$$

を求めよ．

(2) 任意の $\beta \in \mathbf{R}$ に対し，等式

$$Z_{2N}(\beta) = \gamma^N Z_N(\beta')$$

が任意の正整数 N に対して成り立つような，$\gamma \in \mathbf{R}$ と $\beta' \in \mathbf{R}$ が一意的に存在することを示せ．また，γ と β' を，β と q を用いて表せ．

(3) (2) で求めた対応 $\beta \mapsto \beta'$ は変換 $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を定める．ϕ の固定点をすべて求めよ．

B 第16問

連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 + ax_3 &= 1+a \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ bx_1 + x_2 + x_3 &= 2+b \end{cases}$$

を考える．ただし，$a, b \in \mathbf{R}$ は，$ab - a \neq 1$ を満たすとする．この方程式を解くために，点列

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3, \quad y^{(k)} = \begin{pmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ y_3^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

を以下の式を満たすように定める．

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} + ax_3^{(k)} &= 1+a \\ x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} &= 2 \\ bx_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + x_3^{(k+1)} &= 2+b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1^{(k+1)} + ay_3^{(k)} &= 1+a \\ y_1^{(k)} + y_2^{(k+1)} &= 2 \\ by_1^{(k)} + y_2^{(k)} + y_3^{(k+1)} &= 2+b. \end{cases}$$

ただし，$x^{(0)}$ と $y^{(0)}$ は $x^{(0)} = y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．さらに，$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $b = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = w$ となるための，a についての必要十分条件を求めよ．
また，$a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\lim_{k\to\infty} y^{(k)} = w$ を示せ．

(2) $b = a$ のとき，$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = w$ となるための，a についての必要十分条件を求めよ．
また，$a^2 + |a| < 1$, $b = a$ のとき，$\lim_{k\to\infty} y^{(k)} = w$ を示せ．

B 第 17 問

$a, b, c \in \{-1, 0, 1\}$ に対し, $\sigma(a,b,c) = (b,c,a)$ および $\tau(a,b,c) = (-a,-b,-c)$ とする. 次の 3 条件を満たす有向グラフを考える.

(i) 次の頂点と有向辺をもつ:

$$(0,1,1) \to (1,0,1) \to (0,-1,1) \to (-1,0,1) \to (0,1,1).$$

(ii) $(a,b,c) \to (a',b',c')$ のとき, $\sigma(a,b,c) \to \sigma(a',b',c')$ および $\tau(a',b',c') \to \tau(a,b,c)$ である.

(iii) 上記 (i)(ii) で生成される以外の頂点や辺をもたない.

このようにして, 12 頂点および 24 辺をもつ有向グラフが定まる. その頂点の集合を Q とする. グラフの有向辺に沿った無限パス $\pi(0) \to \pi(1) \to \pi(2) \to \cdots$ のうちで, 最初の頂点 $\pi(0)$ が $q \in Q$ に等しいもの全体を $\Pi(q)$ と書くことにする. 集合 $X \subseteq Q$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathbf{EG}(X) &= \{q \in Q \mid \exists \pi \in \Pi(q)\, \forall n \geq 0\ \pi(n) \in X\}, \\ \mathbf{AF}(X) &= \{q \in Q \mid \forall \pi \in \Pi(q)\, \exists n \geq 0\ \pi(n) \in X\} \end{aligned}$$

と定める. また $|X|$ で X の元の個数を表すとする.

(1) $\mathbf{AF}(\mathbf{EG}(X)) \neq \mathbf{EG}(\mathbf{AF}(X))$ を満たす $X \subseteq Q$ は存在するか. 存在するならば, そのような X に対する $|X|$ の最大値および最小値を求めよ.

(2) $\mathbf{AF}(\mathbf{EG}(X)) \supsetneq \mathbf{EG}(\mathbf{AF}(X))$ を満たす $X \subseteq Q$ は存在するか. 存在するならば, そのような X に対する $|X|$ の最大値および最小値を求めよ.

B 第 18 問

なめらかなベクトル場 $u : \mathbf{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbf{R}^3$ とスカラー場 $p : \mathbf{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbf{R}$ に対して、次の 3 次元非圧縮オイラー方程式を考える.

$$\text{(I)} \quad \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0.$$

ここで, $u = u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$, $p = p(x,t)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $t \in [0,\infty)$ に対して,

$$\nabla \cdot u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad (u \cdot \nabla) u = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} u + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} u + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} u,$$
$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3} \right)$$

と定める. また, $\eta : \mathbf{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbf{R}^3$ は, (I) の方程式の解 u を用いて常微分方程式

$$\text{(II)} \quad \partial_t \eta(x,t) = u(\eta(x,t),t), \quad \eta(x,0) = x \in \mathbf{R}^3$$

で一意的に定まる, なめらかな解とする.

(1) (I) の微分方程式の解であって, u が $u(x,t) = \Big(\sin(x_2), d(x_2), \sin\big(x_1 - tf(x_2)\big) \Big)$ という形となるもので, 下の条件をみたすものを求めよ. ただし $d : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ はなめらかな関数とする。
  (i) $d(0) = 0$.
  (ii) 任意の $x \in \mathbf{R}^3$ に対して $\dfrac{\partial p}{\partial x_3}(x,0) = 0$ となる.

(2) u と p の組を (1) で得た (I) の解とし, $\eta(x,t)$ は (II) で定まるものとする. このとき、 $|\eta(x,t)|$ の $t \to \infty$ での挙動を調べよ.

(3) 次の条件をもつベクトル場 u, スカラー場 p で (I) をみたすものは存在するか. 存在するならばその例をあげ, しないならばその証明を与えよ.
  (i) u は定数ベクトル場ではなく, 各成分は x の多項式である.
  (ii) p は定数ではない x の多項式である.
  (iii) 任意の $x \in \mathbf{R}^3$ に対して (II) で定まる η に対して, $\sup_{t>0} |\eta(x,t)| < \infty$ となる.