A 第1問 （必答）

x を変数とする高々3次の実係数多項式全体のなす実線型空間を V とする．実数 a に対して，線型写像 g_a, h_a: $V \to \mathbf{R}$ を

$$g_a(f(x)) = f(a), \quad h_a(f(x)) = f'(a), \qquad (f(x) \in V)$$

と定める．ここに，$f'(x)$ は 多項式 $f(x)$ の x についての微分を表す．以下の問に答えよ．

(1) 和空間 $(\mathrm{Ker}\, g_0 \cap \mathrm{Ker}\, g_1) + (\mathrm{Ker}\, g_1 \cap \mathrm{Ker}\, g_2)$ の基底を一組求めよ．ただし，Ker は写像の核を表す．

(2) 和空間 $(\mathrm{Ker}\, g_0 \cap \mathrm{Ker}\, h_a) + (\mathrm{Ker}\, g_1 \cap \mathrm{Ker}\, h_0)$ が直和とならない実数 a をすべて求めよ．

A 第2問 （必答）

$a > 0$ に対し

$$D_a = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a\right\}$$

とする．また，実数 θ に対し，$\mathbf{R}^2$ において原点を中心に D_a を反時計回りに角度 θ 回転した領域を $D_{a,\theta}$ とする．

$$f(a, \theta) = \iint_{D_{a,\theta}} \left(e^{x^3+y^3} - 1\right) dxdy$$

$$g(a, \theta) = \iint_{D_{a,\theta}} \left(x^3 + y^3\right) dxdy$$

とおき，さらに

$$M_a = \max_{\theta \in \mathbf{R}} f(a, \theta), \quad L_a = \max_{\theta \in \mathbf{R}} g(a, \theta)$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) 任意の $a > 0$ に対して，L_a の値を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{a \to +0} \frac{M_a}{f(a, 0)}$ の値を求めよ．

A 第3問

$x \in \mathbf{R}$ に対して

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}, \quad g(x) = \int_1^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t^2}\,dt$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し，$f(x), g(x)$ が絶対収束すること，および，$f(x), g(x)$ は x の連続関数であることを示せ．

(2) n を正の整数，x を正の実数，t は $n \leq t \leq n+1$ を満たす実数とする．このとき，n, x, t に依存しない正の定数 C が存在して，次式が成り立つことを示せ．

$$\left| \frac{\sin(tx)}{t^2} - \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{Cx}{n^2}$$

(3) 次式を示せ．

$$\lim_{x \to +0} \frac{g(x)}{x \log(1/x)} = 1$$

(4) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{x \log(1/x)}$$

A 第4問

V, W を $\mathbf{C}$ 線型空間，$f\colon V \to W$ を $\mathbf{C}$ 線型写像，r を正の整数とする．

$$V^{\otimes r} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r\ \text{個}}, \qquad W^{\otimes r} = \underbrace{W \otimes \cdots \otimes W}_{r\ \text{個}}$$

と書き，$f^{\otimes r}\colon V^{\otimes r} \to W^{\otimes r}$ を f が誘導する $\mathbf{C}$ 線型写像とする．
$g^{\otimes r} = f^{\otimes r}$ をみたす $\mathbf{C}$ 線型写像 $g\colon V \to W$ を全て求めよ．

A 第5問

$p > \dfrac{1}{2}$ に対して，次の値を求めよ．

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2p})} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^p)}{\sqrt{x}}\,dx$$

ただし，正の実数 x に対して，$\Gamma(x)$ は次式で与えられるものとする．

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

A 第 6 問

関数 $x(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) - \frac{2}{t^2}x(t) = \frac{2}{t}$$

について以下の問に答えよ．ただし，t は正の実軸 $\{t \in \mathbf{R} \mid t > 0\}$ を動くものとする．

(1) $a, b \in \mathbf{R}$ に対し，条件

$$x(1) = a, \quad \frac{dx}{dt}(1) = b,$$

をみたす解 $x(t; a, b)$ を求めよ．

(2) 任意の正の整数 n に対して広義積分

$$I_n = \int_0^1 x(t; a, b)(\log t)^n \, dt$$

が収束するための，実数 a, b に対する必要十分条件を求めよ．また，その条件のもとで I_n の値を n, a, b を用いて表せ．

A 第 7 問

集合 M を次のように定義する．

$$M = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} \mid f \text{ は連続かつ広義単調増加}\}$$

M に次の二通りの位相を考える．

(a) M 上の距離 $d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$ が定める位相．

(b) 任意の $x \in [0,1]$ に対して

$$\mathrm{ev}_x : M \to \mathbf{R}; \ f \mapsto f(x)$$

が連続となるような最弱の位相．つまり

$$\left\{ \bigcap_{j=1}^{m} \mathrm{ev}_{x_j}^{-1}(I_j) \,\middle|\, m \text{ は正整数，各 } x_j \text{ は } [0,1] \text{ の元，各 } I_j \text{ は開区間} \right\}$$

で生成される位相．

このとき，位相 (a) と位相 (b) が一致するか否かを答え，それを証明せよ．