令和５（2023）年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

# 専門科目Ｂ　（筆記試験）

令和４（2022）年８月３０日（火）

１１：００　～　１５：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする問題ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

## B 第 1 問

$G$ を有限生成群とし，$G$ の交換子群 $[G,G]$ は有限群であるとする．以下の問に答えよ．

1. $G$ の任意の部分群は有限生成であることを示せ．
2. $x \in G$ とする．$G$ の部分群

$$G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$$

   は指数有限であることを示せ．
3. 以下の条件 (i), (ii) をともにみたす $G$ の部分群 $N$ が存在することを示せ．
   (i) $N$ は $G$ の指数有限の正規部分群である．
   (ii) $N$ はアーベル群で $N \cap [G,G]$ は単位群である．

## B 第 2 問

$\mathbf{C}[X,Y]$ を複素数体 $\mathbf{C}$ 上の 2 変数多項式環とする．以下の問に答えよ．

1. $A = \mathbf{C}[X,Y]/(XY)$ とおき, $M$ を有限生成 $A$ 加群とする．$M/XM$ が自由 $A/(X)$ 加群であり，$M/YM$ が自由 $A/(Y)$ 加群であるとき，$M$ は自由 $A$ 加群であることを示せ．
2. $Z = X + Y - 1 \in \mathbf{C}[X,Y]$, $B = \mathbf{C}[X,Y]/(XYZ)$ とおく．以下の条件 (i), (ii) を満たす有限生成 $B$ 加群 $N$ を一つ与えよ．
   (i) $N/XN$ は階数 1 の自由 $B/(X)$ 加群であり，$N/YN$ は階数 1 の自由 $B/(Y)$ 加群であり，$N/ZN$ は階数 1 の自由 $B/(Z)$ 加群である．
   (ii) $N$ は自由 $B$ 加群でない．

**B 第 3 問**

$K = \mathbf{R}(X)$ を実数体 $\mathbf{R}$ 上の 1 変数有理関数体とする．多項式

$$f(T) = T^8 + 4T^6 + (7 - X)T^4 + 4T^2 + 1 \in K[T]$$

に対し，$Y$ を $f(T) = 0$ の解の一つとする．$M = K(Y)$ とし，$M$ の $K$ 上のガロア閉包を $L$ とする．以下の問に答えよ．

1. 拡大次数 $[M : K], [L : K]$ を求めよ．
2. $L/K$ の中間体 $N$ で $L$ が $N$ 上の 4 次巡回拡大となるものの個数を求めよ．
3. $F$ を $L/K$ の中間体で $K$ 上アーベル拡大となるようなもののうちで最大のものとする．$[F : K]$ および $F$ を求めよ．

**B 第 4 問**

$p$ を奇素数とし，$\mathbf{F}_p$ を位数 $p$ の有限体とする．一般線型群 $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ の部分群 $H$ に対し，次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ $H$ は巡回群である．更に，$\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ のアーベル部分群 $H'$ であって $H \subsetneq H'$ となるものは存在しない．

以下の問に答えよ．

1. $H$ を $(*)$ を満たす $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ の部分群とし，$h$ を $H$ の生成元とする．行列 $h$ の最小多項式は $\mathbf{F}_p$ 係数既約 3 次多項式であることを示せ．
2. $(*)$ を満たす $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_p)$ の部分群 $H$ の個数を求めよ．

**B 第 5 問**

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 上の同値関係 $\sim$ を次のように定める．

$(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbf{R}^3$ に対し，$(x,y,z)\sim(x',y',z')$ とは，ある整数 $l,m,n$ が存在して

$$(x+l,\ y+m,\ z+mx+n) = (x',y',z')$$

が成り立つこととする．

(1) 同値関係 $\sim$ による $\mathbf{R}^3$ の商空間 $X=\mathbf{R}^3/\sim$ は，射影 $\pi\colon \mathbf{R}^3\to X$ が $C^\infty$ 級写像となるような $C^\infty$ 級多様体の構造をもつことを示せ．

(2) $\omega = dx\wedge dy$ を $\mathbf{R}^3$ 上の 2 次微分形式とするとき，$\omega=\pi^*(d\eta)$ をみたす $X$ 上の 1 次微分形式 $\eta$ は存在するか．存在するならばそのような $\eta$ を一つ求めよ．存在しないならばそのことを示せ．

(3) $\omega = dy\wedge dz$ を $\mathbf{R}^3$ 上の 2 次微分形式とするとき，$\omega=\pi^*(d\eta)$ をみたす $X$ 上の 1 次微分形式 $\eta$ は存在するか．存在するならばそのような $\eta$ を一つ求めよ．存在しないならばそのことを示せ．

**B 第 6 問**

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の部分位相空間 $X$ を

$$\begin{aligned}
X &= S_1\cup S_2\cup S_3,\\
S_1 &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid (x-2)^2+y^2+z^2=4\},\\
S_2 &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=4\},\\
S_3 &= \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid (x+2)^2+y^2+z^2=4\}
\end{aligned}$$

で定める．

(1) $X$ の整係数ホモロジー群 $H_*(X;\mathbf{Z})$ を求めよ．また $H_1(X;\mathbf{Z})$ の生成元を図もしくは式を用いて表せ．

(2) $X\setminus\{(0,0,0)\}$ の各点 $p$ を $-p$ と同一視して得られる $X\setminus\{(0,0,0)\}$ の商空間を $Y$ とする．$Y$ の整係数ホモロジー群 $H_*(Y;\mathbf{Z})$ を求めよ．

**B 第 7 問**

2 次の複素正方行列全体のなす集合を $M(2,\mathbf{C})$ とし，その部分集合 $X$ を次で定める.

$$X = \{A \in M(2,\mathbf{C}) \mid A^2 = E,\ A \neq E, A \neq -E\}.$$

ただし，$E$ は 2 次単位行列である．$X$ に $M(2,\mathbf{C})$ の相対位相を与える．$\mathbf{R} \times \mathbf{C}$ の原点を中心とする半径 1 の球面を $S^2$ とおく．すなわち

$$S^2 = \{(t,u) \in \mathbf{R} \times \mathbf{C} \mid t^2 + |u|^2 = 1\}.$$

各 $A \in X$ に対し，$\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ であって

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

を満たすものをとり，$f(A) = (|\alpha|^2 - |\beta|^2, 2\bar{\alpha}\beta)$ とする．

(1) $f$ は $\alpha, \beta$ のとり方に依らずに $X$ から $S^2$ への写像を定めることを示せ.

(2) $f$ は連続写像であることを示せ.

(3) $S^2$ の各点 $p$ に対して，逆像 $f^{-1}(p)$ は $\mathbf{R}^2$ と同相であることを示せ.

**B 第 8 問**

4 次の実正方行列全体の集合 $\mathrm{M}_4(\mathbf{R})$ をユークリッド空間 $\mathbf{R}^{16}$ と同一視する．次の条件 (a)〜(d) をすべて満たす行列 $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,4}$ 全体のなす $\mathrm{M}_4(\mathbf{R})$ の部分位相空間を $M$ とする．

(a) $\operatorname{rank} A = 1$

(b) $A$ は対称行列である

(c) $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, a_{4,4} \geq 0$

(d) $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq 4} (a_{i,j})^2 = 1$

4 次元の列ベクトル $x$ の転置を $x^{\mathrm{T}}$ と表し，次の写像を考える．

$$\phi\colon \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathrm{M}_4(\mathbf{R}), \quad x \longmapsto xx^{\mathrm{T}}$$

以下の問に答えよ．

(1) $\phi|_{\mathbf{R}^4 \setminus \{0\}}\colon \mathbf{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathrm{M}_4(\mathbf{R})$ ははめこみであることを示せ．

(2) $M$ は $\mathrm{M}_4(\mathbf{R})$ の $C^\infty$ 級の部分多様体であることを示せ．

(3) 比 $\mathrm{vol}(M)/\mathrm{vol}(S^3)$ を求めよ．

ただし，$\mathrm{vol}(M)$ および $\mathrm{vol}(S^3)$ はそれぞれ $\mathrm{M}_4(\mathbf{R})$ および $\mathbf{R}^4$ のユークリッド計量から定まる多様体 $M$ および単位球面 $S^3$ の体積を表す．

**B 第 9 問**

閉区間 $[0,1]$ 上の実数値 $L^\infty$ 関数からなるバナッハ空間 $L^\infty([0,1])$ を $X$ で表す．ただし，$[0,1]$ 上の測度としてはルベーグ測度を考えるものとする．

(1) 任意の $f \in X$ に対し，次で定まる関数 $Tf$ は $[0,1]$ 上連続であることを示せ．

$$(Tf)(x) = \int_0^1 \frac{f(y)}{|x-y|^{1/2}}\,dy, \quad x \in [0,1].$$

(2) 線型作用素 $T\colon X \to X$ の作用素ノルム $\|T\|$ を求めよ．

(3) $f \in X$ が等式

$$\|Tf\|_\infty = \|T\|\|f\|_\infty$$

を満たすならば，$f$ は定数関数であることを示せ．

**B 第 10 問**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間で $\mu(\Omega) = 1$ を満たすとする．$\Omega$ 上の $\mu$-可積分である実数値関数からなるバナッハ空間を $L^1(\Omega)$ で表す．次の問に答えよ．

(1) 任意の正の定数 $a$ と $f \in L^1(\Omega)$ に対して

$$\mu\left(|f| \geq a\right) \leq \frac{1}{a} \int_{\Omega} |f(x)|\, d\mu(x)$$

となることを示せ.

(2) 関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset L^1(\Omega)$ は以下を満たすとする．

(i) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \iint_{\Omega \times \Omega} |f_n(x) - f_n(y)|\, d\mu(x) d\mu(y) = 0,$

(ii) $\displaystyle \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_{\Omega} |f_n(x)|^2\, d\mu(x) \leq 1,$

(iii) $\displaystyle \int_{\Omega} f_n(x)\, d\mu(x) = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots.$

このとき，$\displaystyle \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} |f_n(x)|\, d\mu(x) = 0$ となることを示せ.

(3) (2) の (i), (ii), (iii) を満たし，$\displaystyle \inf_{n \in \mathbf{N}} \int_{\Omega} |f_n(x)|^2\, d\mu(x) > 0$ となるような測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ の例をあげよ．

**B 第 11 問**

$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ は既知とする．次の問に答えよ．

(1) $\phi \in C^2(\mathbf{R})$ とし，$u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right)$ とする．$u(x,t)$ が $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ を $x \in \mathbf{R},\ t > 0$ でみたすとする．このとき，$\phi$ がみたす常微分方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた常微分方程式をみたし，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \phi(s)ds = 1$ をみたすような $\phi$ を求めよ．

(3) 次の初期境界値問題を考える．

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & t > 0,\ x > 0, \\ u_x(x,t) = 0, & t > 0,\ x = 0, \\ u(x,0) = 2e^{-x^2}\sin^2(x), & x > 0. \end{cases}$$

古典解の 1 つを積分を用いて書け．さらにその積分を計算せよ．

**B 第 12 問**

$D$ を原点 $z = 0$ を含む複素平面 $\mathbf{C}$ 内の領域，$f$ を $D$ 上の正則関数とする．$f$ の零点の位数はすべて 1 であるとし，$f(0) \neq 0$ とする． 各 $r > 0$ に対し $B_r = \{z \in \mathbf{C};\ |z| < r\}, \overline{B}_r = \{z \in \mathbf{C};\ |z| \leq r\}$ とおく．また

$$S = \{r \in \mathbf{R};\ r > 0, \overline{B}_r \subset D, f \text{ は } \{z \in \mathbf{C};\ |z| = r\} \text{ 上に零点を持たない }\}$$

とおく．

(1) $r \in S$ とする． $f$ は $B_r$ 内に零点を持つとし，$B_r$ に含まれる $f$ の零点全体を $a_1, \ldots, a_n$ とする．このとき

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$$

の値を $f(0), r, a_1, \ldots, a_n$ を用いて表せ．

(2) 各 $r > 0$ に対し

$$L(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max\{\log|f(re^{i\theta})|, 0\}\,d\theta, \quad M(r) = \max\{|f(z)|;\ z \in \overline{B}_r\}$$

とおく． $1 \in S$ とする． このとき $0 < r < 1$ なる任意の $r \in S$ に対して

$$L(r) \leq \max\{\log M(r), 0\} \leq \frac{1+r}{1-r}L(1)$$

が成り立つことを示せ．

**B 第 13 問**

次の関数 $x(t), y(t), z(t)$ に関する微分方程式と初期値問題について考える.

$$\begin{cases} x' = 4\gamma\, x(z-x), & t>0, \\ y' = y\,(1-x-y), & t>0, \\ z' = x\,(y-\gamma x), & t>0, \end{cases}$$

$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,\ z(0)=z_0,$$
$$0<y_0<1, \quad 0<\frac{x_0}{2}<z_0.$$

ただし，$\gamma$ を正の実数とする.

下記の問に答えよ.

(1) 任意の $t>0$ に対して $x(t), y(t)>0$ を示せ.
(2) 任意の $t>0$ に対して $z(t)>\dfrac{x(t)}{2}$ を示せ.
(3) 上記の条件の下で，$\gamma$ が十分大きければ微分方程式に局所漸近安定の平衡点が存在することを示せ.

**B 第 14 問**

$N \geq 3$ を整数とする．質量 1 の $N$ 個の質点が周期的有限格子 $\Lambda = \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ 上に配置され，指数関数型ポテンシャルで隣接相互作用をする力学系を考える．正準座標 $(x_j, y_j)_{j\in\Lambda}$ を用いて，系のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j\in\Lambda} y_j^2 + \sum_{j\in\Lambda} e^{x_j - x_{j+1}}$$

で与えられるものとする．

(1) $(x_j, y_j)_{j\in\Lambda}$ に対するハミルトンの運動方程式，および位置座標 $(x_j)_{j\in\Lambda}$ に対するニュートンの運動方程式を書け．

(2) 新しい力学変数として

$$a_j = e^{(x_j - x_{j+1})/2}, \qquad b_j = -y_j \qquad (j \in \Lambda)$$

を導入する．運動方程式を $(a_j, b_j)_{j\in\Lambda}$ に対する 1 階微分方程式系の形で表せ．

(3) 2 つの $N \times N$ 行列 $A$, $L$ を

$$A = \frac{1}{2}\sum_{j\in\Lambda} a_j(E_{j,j+1} - E_{j+1,j}), \qquad L = \sum_{j\in\Lambda}(b_j E_{j,j} + a_j(E_{j,j+1} + E_{j+1,j}))$$

で定義する．ただし，$E_{i,j}$ は $(i,j)$ 成分のみが 1 で残りが 0 であるような $N \times N$ 行列とする．このとき，(2) で求めた微分方程式を $\dfrac{dL}{dt} = f(A, L)$ の形に表せ．

(4) 任意の非負整数 $k$ に対し，$\mathrm{Tr}\,(L^k)$ が保存量であることを示せ．

(5) 行列 $L$ の各固有値は保存量であることを証明せよ．

**B 第 15 問**

正の整数 $m$ に対して，$A$ を正則な $m \times m$ 実行列とする．$\mathbf{R}^m$ のノルムを一つ固定して，それから誘導される行列ノルム（作用素ノルム）を $\|\cdot\|$ で表す．$0 < r < 1$ に対して，$m \times m$ 実行列 $X_0$ は，$\|I - AX_0\| = r$ を満たすとする．ただし，$I$ は $m \times m$ 単位行列である．$m \times m$ 実行列の列 $X_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を，

$$X_n = X_{n-1}(2I - AX_{n-1})$$

で定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) $B = \lim_{n \to \infty} X_n$ を満たす正則な $m \times m$ 実行列 $B$ が存在すること，および，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\|X_n - B\| \leq \frac{\|X_0\|}{1 - r} r^{2^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

(2) 上の不等式において，等号が成立するような，$A$，$X_0$，$r$ の例を一つ挙げよ．

**B 第 16 問**

$\epsilon_j$ $(j=1,2,...)$ を，確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上に定義された独立確率変数列とし，各 $\epsilon_j$ は標準正規分布に従うとする．確率変数 $X_j$ $(j=0,1,2,...)$ を次のように定める：

$$\begin{cases} X_0 &=& 0, \\ X_j &=& \theta\bigl(X_{j-1}+\epsilon_j\bigr) \quad (j=1,2,...). \end{cases}$$

ここで，$\theta$ は $0<\theta<1$ を満たす定数である．正の整数 $n$ に対して，$t\in(0,\infty)$ の関数 $\ell_n(t)$ を

$$\ell_n(t) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\bigl(X_j - tX_{j-1}\bigr)^2}{t^2} + \log(t^2)\right\}$$

と定義する．さらに，$\ell_n$ を $(0,\infty)$ において最大にする $t$ を $\widehat{\theta}_n$ とする．

以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\sup_{j=1,2,...} E\bigl[X_j^2\bigr]<\infty$ を示せ．ここで，$E$ は $P$ に関する期待値を表す．

(2) $n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j-1}\epsilon_j$ が 0 へ確率収束することを示せ．

(3) $\widehat{\theta}_n$ を $X_1,...,X_n$ を用いて表せ．

(4) $n\to\infty$ のとき，$\widehat{\theta}_n$ が $\theta$ へ確率収束することを示せ．

**B 第 17 問**

$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された独立同分布な確率変数列とする．$\theta$ を実数のパラメータとし, 各 $i = 1, \ldots, n$ について

$$X_i = \theta + \epsilon_i$$

と定める．以下の問に答えよ.

(1) $\epsilon_1$ は平均 1, 分散 1 の正規分布に従うとする．このとき, $X_1, \ldots, X_n$ に基づく $\theta$ の最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ を求めよ．さらに, $\hat{\theta}_n$ が $\theta$ の不偏推定量であるかを判定せよ.

(2) $\epsilon_1$ の分布が，以下の式で定まる関数 $f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$ を確率密度関数に持つとする.

$$f(x) = \exp(-x - e^{-x}) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

このとき, $X_1, \ldots, X_n$ に基づく $\theta$ の最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ を求め, 期待値 $E[e^{-\hat{\theta}_n}]$ を計算せよ．さらに, $\hat{\theta}_n$ が $\theta$ の不偏推定量であるかを判定せよ.

(3) $\epsilon_1$ の分布が，以下の式で定まる関数 $f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$ を確率密度関数に持つとする.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \text{ のとき}, \\ 0 & \text{その他のとき}. \end{cases}$$

このとき, $X_1, \ldots, X_n$ に基づく $\theta$ の最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ を求め, $\hat{\theta}_n$ の分布の確率密度関数を計算せよ．さらに, $\hat{\theta}_n$ が $\theta$ の不偏推定量であるかを判定せよ.

**B 第 18 問**

次の 2 つの命題は正しいか．それぞれ，正しいならば証明を，誤りならば反例を与えよ.

(1) $L$ を文脈自由言語とするとき，$\{w \in L\,;\, |w| \text{ は偶数 }\}$ は文脈自由言語である．ここで $|w|$ は文字列 $w$ の長さを表す.

(2) 無限文脈自由言語は，無限個の互いに交わらない無限文脈自由言語の和集合として表せる.