平成３１年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆記試験）

平成３０年　８月　２７日（月）
１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ１，Ａ２は必答問題である．Ａ３～Ａ７の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，および**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

A 第1問（必答）

$x > -1,\ x \neq 0$ として

$$f(x) = \left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく.

(1) 極限 $\alpha = \lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ.

(2) (1) の α を用いて, $\{x \in \mathbf{R} \mid x > -1\}$ 上の関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq 0), \\ \alpha & (x = 0) \end{cases}$$

で定義する. このとき, 関数 $g(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ.

(3) $g(x)$ を (2) で与えたものとするとき, 以下が成立する実数 β, γ を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\{g(x) - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)\} = 0.$$

A 第2問（必答）

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ とするとき, 3次の実正方行列 T, D, U であって次の条件を満たすものを一組求めよ.

(i) $A = TDU$.

(ii) T は直交行列である. つまり ${}^tTT$ が3次の単位行列となる. ここで, ${}^tT$ は T の転置を表す.

(iii) D は対角行列で, その対角成分はすべて正である.

(iv) U は上三角行列で, その対角成分はすべて1である.

A 第3問

n を 1 以上の整数とし，複素 n 次正方行列全体を $M(n,\mathbf{C})$ で表す．$A \in M(n,\mathbf{C})$ は $A^n = 0$ かつ $A^{n-1} \neq 0$ を満たすとする．また，$I \in M(n,\mathbf{C})$ で単位行列を表す．

(1) $B \in M(n,\mathbf{C})$ に対し，B が A と可換ならば

$$B = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_{n-1}A^{n-1}$$

となる複素数 $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ が存在することを示せ．

(2) $X^2 = I + A$ を満たす $X \in M(n,\mathbf{C})$ は有限個であることを示せ．

A 第4問

ユークリッド平面 $\mathbf{R}^2$ の部分位相空間 X を

$$X = \{(x,m) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [0,1],\, m \in \mathbf{Z},\, m \geq 0\}$$

とする．各整数 $k \geq 1$ について点 $(1,k)$ と点 $(1/k, 0)$ を同一視して得られる X の商集合 Y に商位相を与え，自然な射影を $p\colon X \to Y$ とする．

(1) Y はハウスドルフ空間であることを示せ．

(2) $\{(x,k) \in X \mid x \in [0,1),\ k \geq 1\}$ の p による像を C とする．このとき，$p\big((0,0)\big) \in \overline{C}$ を示せ．ここで，$\overline{C}$ は Y の中での C の閉包とする．

(3) C を (2) で定めた Y の部分集合とするとき，$p\big((0,0)\big)$ に収束する C の点列は存在するか．存在するならば具体的に一つ構成し，存在しないならばその証明を与えよ．

A 第 5 問
方程式 $z^6+6z+20=0$ の解のうち

$$D=\{z=x+iy\in\mathbf{C}\mid\ x,y\in\mathbf{R},\,x>0,\,y>0\}$$

に含まれるものの個数を求めよ．ただし，重解はその重複をこめて数えるものとする．

A 第 6 問
実数値関数 $x(t)$ は区間 $[0,1]$ で連続で，区間 $(0,1)$ で連続微分可能であるとする．

(1) 条件

$$\text{(i)}\ x(t)=\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds\quad(0<t<1),\qquad\text{(ii)}\ x(0)=1$$

を満たす $x(t)$ を求めよ．

(2) $t\in(0,1)$ で条件

$$\text{(i)}\ x(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \exp\left(-\frac{x(s)}{2}\right)ds,\qquad\text{(ii)}\ x(t)\geq 0$$

を満たす $x(t)$ は存在すればただ一つしかないことを示せ (存在は示さなくてもよい)．

A 第7問

正の実数 ε をパラメータとする関数 $f_\varepsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} x^{-1} & (|x| > \varepsilon), \\ 0 & (|x| \le \varepsilon) \end{cases}$$

とする．また関数 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < 1), \\ 0 & (|x| \ge 1) \end{cases}$$

とする．さらに

$$F_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(y) g(x-y)\, dy$$

とおく．p を正の実数とする．ある $C > 0$ が存在して，

$$\limsup_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} |F_\varepsilon(x)|^p\, dx < C$$

となるための p の必要十分条件を求めよ．