J. Math. Sci. Univ. Tokyo
12 (2005), 493–512.

Ramification des Solutions du Problème de Cauchy Fuchsien au Voisinage de l'Hypersurface Initiale

By Patrice Pongérard

Abstract. The purpose of this paper is the decision of the domain of ramification near the initial surface $t = 0$ of solutions of the Cauchy problem for a linear differential operator of Fuchs type according to Baouendi-Goulaouic. Our main result in theorem 1.1 is as follows : if, for a certain continuous function f, the datas are ramified in an open set of the form $\{(t, x) \in \mathbf{C}\times\Omega;\ |t| < f(x)\}$, then the solution is ramified in an open set of the form $\{(t, x) \in \mathbf{C} \times \Omega';\ |t| < cf(x)^m\}$. The proof is reduced to a fuchsian equation (with an additional variable z) that is solved by the fixed-point theorem in a Banach space.

1. Résultats

Les coordonnées d'un point (t, x) de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n$ seront notées $(t, x_1, \ldots, x_n)$. L'opérateur de dérivation par rapport à la variable t (resp. x_j) sera noté D_t (resp. D_j) et nous poserons D_t^l et $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ pour tout $l \in \mathbf{N}$ et tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$. Étant donné un entier $m \geq 1$ et un entier $0 \leq p \leq m$, on considère une partie fuchsienne d'ordre m et de poids p

$$a(t, x, D_t) = \sum_{l=p}^{m} a_l(x) t^{l-p} D_t^l$$

où les fonctions a_l sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$ avec $a_m(0) \neq 0$. On appelle polynôme indiciel de $a(t, x, D_t)$ le polynôme de degré m, d'indéterminée T

$$\mathcal{C}(x, T) = \sum_{l=p}^{m} a_l(x) \prod_{\nu=0}^{l-1} (T - \nu)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35A07; Secondary 35A20, 35A10.

où on convient que $\prod\limits_{\emptyset} = 1$; on obtient les relations

$$t^p a(t,x,D_t) = \sum_{l=p}^{m} a_l(x) t^l D_t^l = \mathcal{C}(x, tD_t) \quad \text{et}$$
$$\mathcal{C}(x,tD_t)t^q u = t^q \mathcal{C}(x, tD_t + q),\ \forall q \in \mathbf{Z}$$

où $\mathcal{C}(x, tD_t + q)$ est une partie fuchsienne de poids 0.

On considère le problème de Cauchy fuchsien

$$(1.1)\quad \begin{cases} a(t,x,D_t)u(t,x) & = \sum\limits_{\substack{l+|\alpha|\le m \\ l<m}} a_{l\alpha}(t,x) t^{1+l-p+\nu} D_t^l D^\alpha u(t,x) + v(t,x), \\ D_t^h u(0,x) & = w_h(x) \quad \text{pour} \quad 0 \le h < p \end{cases}$$

où $\nu \equiv \nu(l) = \max(p-l-1, 0)$, les fonctions $a_{l\alpha}$ étant holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$.

Il existe un plus petit entier $p_0 \ge p$ tel que

$$(1.2)\qquad \mathcal{C}(0,k) \neq 0 \text{ pour tout entier } k \ge p_0.$$

Lorsque $p_0 = p$, rappelons ([1]) que, pour toutes fonctions $(w_h)_{0\le h<p}$ et v holomorphes au voisinage de $x = 0$ et $(t,x) = (0,0)$ respectivement, le problème de Cauchy (1.1) admet une unique solution holomorphe au voisinage de $(t,x) = (0,0)$ (remarque 2.6). Dans ce texte, nous supposerons

$$p_0 > p.$$

On introduit l'ensemble non vide

$$\mathcal{L}_0 = \{\lambda \in [p, p_0[\cap \mathbf{N};\ \mathcal{C}(0,\lambda) = 0\}.$$

En écrivant $\mathcal{C}(x,T) = \sum\limits_{l=0}^{m} b_l(x) T^l$ où chaque fonction b_l est une combinaison linéaire des fonctions a_l, avec $b_m = a_m$, on remarque que l'appliction $(x,\mu) \mapsto \sum\limits_{l=0}^{m} b_l(x)\mu^{m-l}$ est continue au voisinage du compact $\{(0,k^{-1});\ k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ et $k \ge p_0\}$ et ne s'y annule pas par hypothèse ; ceci montre l'existence d'un voisinage ouvert connexe Ω_0 de l'origine de $\mathbf{C}^n$, sur lequel on peut supposer les fonctions a_l définies et holomorphes, tel que

$$(1.3)\qquad \mathcal{C}(x,k) \neq 0 \text{ pour tout } x \in \Omega_0 \text{ et tout } k \notin \mathcal{L}_0.$$

On pose alors
$$\mathcal{L} = \{\lambda \in \mathcal{L}_0;\ \mathcal{C}(\bullet, \lambda) \not\equiv 0\}$$
et
$$V = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{L}} V_\lambda \text{ où } V_\lambda = \{x \in \Omega_0;\ \mathcal{C}(x, \lambda) = 0\}.$$
Chaque ensemble V_λ est un ensemble analytique complexe et, par conséquent, si $\Omega \subset \Omega_0$ est un ouvert connexe, alors $\Omega - V$ est un ouvert connexe de $\mathbf{C}^n$. On notera que les ensembles analytiques V_λ ne sont pas en général des hypersurfaces de Ω_0 mais se réduisent à $\{x_1 = 0\}$ lorsque $n = 1$ d'après le théorème des zéros isolés (quitte à prendre Ω_0 plus petit). Étant donné une fonction continue $f\ :\ \Omega_0 \to \mathbf{R}_+$ qui vérifie $\{x \in \Omega_0;\ f(x) = 0\} = V$, on définit pour tout ouvert $\Omega \subset \Omega_0$, l'ouvert
$$(\mathbf{C} \times \Omega)_f = \{(t, x) \in \mathbf{C} \times \Omega;\ |t| < f(x)\}\ ;$$
c'est un ouvert connexe de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ lorsque Ω est connexe. En effet, soient $x,\ x' \in \Omega - V$ et $t = \tau f(x)$, $t' = \tau' f(x')$ où $|\tau|,\ |\tau'| < \kappa$, on choisit des chemins γ reliant x et x' dans $\Omega - V$ et σ reliant τ et τ' avec $|\sigma| < 1$, alors le chemin $(\sigma f(\gamma), \gamma)$ relie (t, x) et (t', x') dans $(\mathbf{C} \times \Omega)_f$.

On désigne par d l'application qui à tout point $x \in \Omega_0$ associe la distance de x à V.

Pour des données w_h et v holomorphes au voisinage de l'origine, H. Yamane [13] a montré lorsque $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ que la solution de (1.1) est holomorphe sur un ouvert de la forme $\{(t, x) \in \mathbf{C} \times \Omega';\ |t| < \kappa d(x)^I\}$ où $I \in [0, m]$ est un réel défini par les coefficients $(a_{l\alpha})_{\substack{l+|\alpha|=m \\ l<m}}$ de la partie principale, valant 0 lorsque ces derniers sont identiquement nuls, auquel cas la solution est holomorphe pour $|t| < \kappa$ et $x \in \Omega' - V$.

On peut bien entendu supposer que toutes les fonctions $a_{l\alpha}$ sont définies et holomorphes sur $\mathcal{D}_0 \times \Omega_0$ où $\mathcal{D}_0$ est un voisinage ouvert du point $t = 0$. On notera S l'hyperplan de $\mathbf{C}_t \times \mathbf{C}^n_x$ d'équation $t = 0$.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit $c > 0$, il existe $\kappa > 0$ et, pour tout voisinage ouvert connexe $\Omega \subset \Omega_0$ de l'origine de $\mathbf{C}^n$, un voisinage ouvert connexe $\Omega' \subset \Omega$ de l'origine de $\mathbf{C}^n$ tels que : soient $a \in \Omega' - V$, $(w_h)_{0 \le h < p}$ des germes au point a se prolongeant en des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}(\Omega - V)$ et*

v un germe au point $(0,a)$ se prolongeant en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\{(t,x) \in \mathbf{C} \times \Omega;\ |t| < cd(x)\})$, alors on a les conclusions suivantes.
1. Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, le problème de Cauchy (1.1) admet une unique solution holomorphe au voisinage du point $(0,a)$ et elle se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\{(t,x) \in \mathbf{C} \times \Omega';\ |t| < \kappa d(x)^m\})$.
2. Si $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}_0$, soit u une solution formelle du problème de Cauchy (1.1) de la forme $u = \sum_{k\in\mathbf{N}} u_k(x)t^k$ où chaque fonction u_k est holomorphe au voisinage du point a, les germes u_k, $k \in \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}$, se prolongeant en des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}(\Omega - V)$, alors u définit un germe au point $(0,a)$ qui se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\{(t,x) \in \mathbf{C}\times\Omega';\ |t| < \kappa d(x)^m\})$.

Voici d'abord une remarque concernant ce théorème. Considérons un opérateur différentiel linéaire A, à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$, de la forme

$$A(t,x;D_t,D) = t^{m-p}g(t,x;D_t,D) + B(t,x;D_t,D) \tag{1.4}$$

où $(\tau,\xi) \mapsto g(t,x;\tau,\xi)$ est un polynôme homogène de degré m vérifiant $g(\bullet;1,0) \equiv 1$ et où B est de la forme

$$B(t,x;D_t,D) = \sum_{p\leq l<m} a_l(x)t^{l-p}D_t^l + \sum_{l+|\alpha|<m} a_{l\alpha}(t,x)t^{(1+l-p)_+}D_t^l D^\alpha \tag{1.5}$$

où $(\bullet)_+ = \max(\bullet,0)$. La partie fuchsienne de A est

$$a(t,x,D_t) = \sum_{p\leq l<m} a_l(x)t^{l-p}D_t^l + t^{m-p}D_t^m. \tag{1.6}$$

On associe à l'opérateur a son polynôme indiciel $\mathcal{C}(x,T)$, l'entier p_0, l'ensemble $\mathcal{L}_0$, un ouvert Ω_0, l'ensemble $\mathcal{L}$ et l'ensemble singulier V. On suppose que tous les coefficients de l'opérateur A sont définis et holomorphes dans $\mathcal{D}_0 \times \Omega_0$ où $\mathcal{D}_0$ est un voisinage ouvert du point $t=0$. Comme dans [3] et [8], supposons que $V \subset \mathbf{C}^n$ admet pour équation locale

$$V\ :\ x_1 = 0$$

et

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \tag{1.7}$$

ce qui signifie

$$\mathcal{C}(0,k)=0 \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{C}(\bullet,k)\not\equiv 0, \qquad \text{pour tout entier} \quad m-1\le k<p_0.$$

En ce qui concerne le polynôme g, on suppose donnés un nombre $\lambda\in\mathbf{C}$ et une fonction k holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n$ vérifiant

$$D_\tau^{m_0} g(0;\lambda,0)\neq 0 \quad \text{pour un entier } 1\le m_0\le m \tag{1.8}$$

et

$$\begin{cases} D_\tau^l D_\xi^\alpha g(t,x;\bigtriangledown k(t,x)) & = \ 0 \quad \text{pour } l+|\alpha|<m_0,\\ \bigtriangledown k(0) & = \ (\lambda,1,0,\ldots,0),\\ k(0,x) & = \ x_1. \end{cases} \tag{1.9}$$

On peut donc supposer la fonction k définie et holomorphe sur $\mathcal{D}_0\times\Omega_0$ et $D_1k(t,x)\neq 0$ pour tout $(t,x)\in\mathcal{D}_0\times\Omega_0$. Ceci permet de définir une hypersurface $K=\{(t,x)\in\mathcal{D}_0\times\Omega_0\,;\,k(t,x)=0\}$ transverse à S. En notant T l'hyperplan de S d'équation $t=x_1=0$, on a $K\cap S=(\mathcal{D}_0\times\Omega_0)\cap T$: l'ensemble K est une hypersurface caractéristique de multiplicité m_0 transverse à S et issue de T vérifiant $K\cap S=\{0\}\times V$. On peut alors donner un corollaire simple du théorème 1.1 concernant le problème de Cauchy

$$\begin{cases} A(t,x;D_t,D)u(t,x) & =v(t,x),\\ D_t^h u(0,x) & =w_h(x) \quad \text{pour} \quad 0\le h<p. \end{cases} \tag{1.10}$$

Théorème 1.2. *Il existe $\kappa>0$ et, pour tout voisinage ouvert connexe $\mathcal{D}\times\Omega\subset\mathcal{D}_0\times\Omega_0$ de l'origine de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n$, un voisinage ouvert connexe $\Omega'\subset\Omega$ de l'origine de $\mathbf{C}^n$ tels que : soient $a\in\Omega'-V$, $(w_h)_{0\le h<p}$ des germes au point a se prolongeant en des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}(\Omega-V)$ et v un germe au point $(0,a)$ se prolongeant en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}((\mathcal{D}\times\Omega)-K)$, alors le problème de Cauchy* (1.10) *admet une unique solution holomorphe au voisinage du point $(0,a)$ et elle se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\{(t,x)\in\mathbf{C}\times\Omega';\ |t|<\kappa|x_1|^m\})$.*

On utilise le lemme suivant.

LEMME 1.3. *Il existe un réel $c > 0$ et un voisinage ouvert connexe Ω_1 de l'origine de $\mathbf{C}^n$ tels que l'ouvert $\{(t,x) \in \mathbf{C} \times \Omega_1;\ |t| < c|x_1|\}$ ne rencontre pas K.*

PREUVE. Si $\lambda = 0$, on a $k(t,x) \equiv x_1$ et le résultat est évident ; on suppose donc $\lambda \neq 0$ et on prend par exemple $c = 1/2|\lambda|$. Vu que $k(0,x) = x_1$, la fonction k est de la forme $k(t,x) = x_1 + t\lambda(t,x)$ où $(t,x) \mapsto \lambda(t,x)$ est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ vérifiant nécessairement $\lambda = \lambda(0)$; d'où l'existence d'un voisinage ouvert connexe Ω_1 de l'origine de $\mathbf{C}^n$ tel que $0 < |\lambda(t,x)| < 2|\lambda|$ pour $(t,x) \in \mathbf{C} \times \Omega_1$ et $|t| < c|x_1|$. S'il existe $(t,x) \in \mathbf{C} \times \Omega_1$ tel que $|t| < c|x_1|$ et $k(t,x) = 0$, alors $t \neq 0$ et $1 < c|\lambda(t,x)|$ ce qui est absurde. □

Ce lemme montre que v se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\{(t,x) \in \mathbf{C} \times \Omega_2;\ |t| < c|x_1|\})$ où Ω_2 est un voisinage ouvert connexe de l'origine de $\mathbf{C}^n$ inclus dans $\Omega \cap \Omega_1$; le théorème 1.1 prouve alors le théorème 1.2. □

Revenons au théorème 1.1. Le résultat d'unicité découle directement du lemme qui suit. En multipliant la première équation du problème de Cauchy (1.1) par t^p, on observe qu'il peut aussi s'écrire

$$(1.11)\qquad \begin{cases} \mathcal{C}(x,tD_t)u(t,x) &= \displaystyle\sum_{\substack{l+|\alpha|\leq m\\ l<m}} a_{l\alpha}(t,x)t^{1+l+\nu}D_t^l D^\alpha u(t,x) \\ & \quad + t^p v(t,x), \\ D_t^h u(0,x) &= w_h(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq h < p. \end{cases}$$

On en déduit le

LEMME 1.4. *Soit $\mathcal{U} \subset \Omega - V$ un ouvert connexe non vide. Toute solution formelle du problème de Cauchy* (1.1) *de la forme*

$$(1.12)\qquad u = \sum_{k\in\mathbf{N}} u_k(x)t^k \quad \textit{où} \quad u_k \in \mathcal{H}(\mathcal{U}),$$

vérifie, pour tout $k \geq p$,

$$(1.13)\qquad \begin{cases} \mathcal{C}(x,k)u_k(x) &= \displaystyle\sum_{\substack{l+|\alpha|\leq m, l<m\\ 1+l+\nu\leq j\leq k}} c_{klj}D_t^{k-j}a_{l\alpha}(0,x)D^\alpha u_{j-1-\nu}(x) \\ & \quad + D_t^{k-p}v(0,x)/(k-p)! \quad \textit{où} \quad c_{klj} \in \mathbf{R}, \\ u_h(x) &= w_h(x)/h! \quad \textit{pour} \quad 0 \leq h < p. \end{cases}$$

Preuve. Vu que $(tD_t)^l t^k = k^l t^k$, on a $\mathcal{C}(x, tD_t)u = \sum_{p\le k} \mathcal{C}(x,k)u_k(x)t^k$ car $\mathcal{C}(\bullet, k) \equiv 0$ pour $0 \le k < p$. D'autre part,

$$t^{1+l+\nu} D_t^l D^\alpha u = \sum_{1+l+\nu\le j} \frac{(j-1-\nu)!}{(j-(1+l+\nu))!} D^\alpha u_{j-1-\nu}(x)t^j,$$

donc, en dérivant (1.11) à l'ordre k, on obtient le résultat voulu. □

Corollaire 1.5. *Lorsque $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, on a le résultat d'unicité du théorème* 1.1.

Preuve. Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, on a $\mathcal{C}(x, \lambda) \ne 0$ pour tout $x \in \Omega_0$ et tout $\lambda \notin \mathcal{L}$ vu (1.3). Soit $a \in \Omega' - V$, si le problème (1.1), avec pour donnée $v = 0$, admet une solution u holomorphe au voisinage du point $(0, a)$, alors u peut s'écrire sous la forme (1.12) au voisinage de $\{0\} \times \mathcal{U}$ où $\mathcal{U} \subset \Omega' - V$ est un polydisque ouvert centré au point a ; la formule (1.13) prouve alors que $u = 0$ au voisinage de $(0, a)$. La connexité de l'ouvert $\{(t,x) \in \mathbf{C} \times \Omega'; |t| < \kappa d(x)^m\}$ permet de conclure. □

En ce qui concerne l'existence d'une solution et son prolongement analytique, on se ramènera à une équation fuchsienne dont la résolution fait l'objet du paragraphe suivant.

2. Une Équation Fuchsienne

Outre l'espace $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ de la variable (t, x), on considère l'espace $\mathbf{C}^q$ dont la variable est notée $(z_1, \dots, z_q)$. Les dérivations en z sont notées $D_z^\gamma = D_{z_1}^{\gamma_1} \cdots D_{z_1}^{\gamma_q}$ pour tout $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q) \in \mathbf{N}^q$. On considère une partie fuchsienne d'ordre m et de poids 0

$$b(t, x, D_t) = \sum_{l=0}^{m} b_l(x) t^l D_t^l$$

où les fonctions b_l sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$ avec $b_m(0) \ne 0$; on note $\mathcal{P}(x, T)$ son polynôme indiciel et on suppose

$$\mathcal{P}(0, k) \ne 0 \text{ pour tout } k \in \mathbf{N}. \tag{2.1}$$

On considère alors l'équation

$$\text{(2.2)}\quad \mathcal{P}(x,tD_t)u(z,t,x) = \sum_{\substack{l+|\beta|+|\gamma|\le m\\ l<m}} a_{l\beta\gamma}(t,x)t^{1+l}D_t^l D^\beta D_z^\gamma u(z,t,x) + v(z,t,x)$$

où les fonctions $a_{l\beta\gamma}$ sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n$. Pour tout ω, r et $R>0$, on pose

$$D_\omega = \{z\in\mathbf{C}^q;\ \max_{1\le i\le q}|z_i|<\omega\},\qquad \mathcal{D}_r=\{t\in\mathbf{C};\ |t|<r\}\qquad \text{et}$$
$$\Delta_R=\{x\in\mathbf{C}^n;\ \max_{1\le j\le n}|x_j|<R\}.$$

Le théorème obtenu s'énonce alors comme suit.

THÉORÈME 2.1. *Soient $\eta>1$, $R_0\in]0,1]$ tels que les fonctions $\varepsilon_l\equiv b_l(0)-b_l$ soient holomorphes dans $\Delta_{\eta R_0}$, vérifient*

$$\text{(2.3)}\qquad \frac{\eta}{\eta-1}\sum_{l=0}^{m}\sup_{\Delta_{\eta R_0}}|\varepsilon_l|\le 1/2,$$

et tels que les coefficients $a_{l\beta\gamma}$ soient holomorphes et bornés dans $\mathcal{D}_{\eta R_0}\times\Delta_{\eta R_0}$ par K si $l+|\beta|+|\gamma|=m$ et par M si $l+|\beta|+|\gamma|<m$. Il existe $c_1=c_1(\eta,R_0,K)\ge 1$ (indépendant de M) tel que : soient $R\in]0,R_0]$, $0<\omega\le r\le R$ et v une fonction holomorphe dans $D_\omega\times\mathcal{D}_r\times\Delta_R$, alors on a les conclusions suivantes.

1. *L'équation (2.2) admet une unique solution u holomorphe pour $\dfrac{(c_1|t|)^{1/m}}{\omega}+\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{|x_j|}{R}+\sum\limits_{i=1}^{q}\dfrac{|z_i|}{\omega}<1$.*

2. *Lorsque $K=0$, u est holomorphe pour $\big((\frac{R}{r}|t|)^{1/m}+\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|\big)\dfrac{1}{R}+\sum\limits_{i=1}^{q}\dfrac{|z_i|}{\omega}<1$.*

Pour démontrer ce théorème, on utilise le lemme suivant [12, lemme 1.2].

LEMME 2.2. *a. Il existe un réel $c_0>0$ tel que $|\mathcal{P}(0,k)|\ge c_0\max(1,k^m)$ pour tout $k\in\mathbf{N}$.*

b. Soient $\mathcal{U}$ *un ouvert de* $(\mathbf{C}^\star)^q$, $R > 0$ *et* Ω *un voisinage ouvert de l'origine de* $\mathbf{C}^n$. *L'opérateur* $\mathcal{P}(0, tD_t)$ *est un automorphisme de* $\mathcal{H}(\mathcal{U} \times \mathcal{D}_R \times \Omega)$; *son inverse* $\mathcal{P}^{-1}$ *est défini par*

$$(\mathcal{P}^{-1}u)(z,t,x) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{t^k}{k!} \frac{D_t^k u(z,0,x)}{\mathcal{P}(0,k)}. \tag{2.4}$$

Preuve. *b.* Soit $u \in \mathcal{H}(\mathcal{U} \times \mathcal{D} \times \Omega)$, vu que $(tD_t)^l t^k = k^l t^k$ pour tout $k, l \in \mathbf{N}$, on a $\mathcal{P}(0, tD_t)u(z,t,x) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{t^k}{k!}\mathcal{P}(0,k)D_t^k u(z,0,x)$ dans $\mathcal{U} \times \mathcal{D}_R \times \Omega$ ce qui montre que $\mathcal{P}(0, tD_t)$ est injectif car $\mathcal{P}(0,k) \neq 0$; son inverse est formellement donné par la série (2.4). Soient $0 < r < s < R$ et $\mathcal{K}$ un compact de $\mathcal{U} \times \Omega$, il existe $c = c(s, \mathcal{K}) \geq 0$ telle que $|\frac{t^k}{k!}D_t^k u(z,0,x)| \leq c\Big(\frac{r}{s}\Big)^k$ pour tout $(z,t,x) \in \mathcal{U}\times\mathcal{D}_r\times\Omega$. Ceci prouve que la série (2.4) converge normalement sur tout compact de $\mathcal{U} \times \mathcal{D}_R \times \Omega$ puisque $|1/\mathcal{P}(0,k)| \leq 1/c_0$, d'où le lemme. □

En écrivant $\mathcal{P}(x, tD_t) = \mathcal{P}(0, tD_t) - \sum_{l=0}^{m} \varepsilon_l(x) t^l D_t^l$, on en déduit que l'équation (2.2) est équivalente à

$$\begin{aligned} &u = \mathcal{A}u + v \quad \text{où} \\ &\mathcal{A}u = \sum_{l=0}^{m} \varepsilon_l(x) t^l D_t^l \mathcal{P}^{-1}u + \sum_{\substack{l+|\beta|+|\gamma|\leq m \\ l<m}} a_{l\beta\gamma}(t,x) t^{1+l} D_t^l D^\beta D_z^\gamma \mathcal{P}^{-1}u. \end{aligned} \tag{2.5}$$

La résolution de cette équation repose sur le théorème du point fixe dans un espace de Banach associé à une fonction majorante. Plus précisément, si $\Phi \in \mathbf{R}_+\{z,t,x\}$ est une série entière convergente à coefficients ≥ 0 c'est-à-dire une fonction majorante, rappelons que le sous-espace vectoriel des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}_z^q \times \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$

$$\{u \in \mathbf{C}\{z,t,x\};\ \exists c \geq 0,\ u \ll c\Phi\}$$

est un espace de Banach pour la norme

$$\min\,\{c \geq 0;\ u \ll c\Phi\}.$$

Le point fixe sera obtenu pour une fonction majorante de la forme $\Phi(\tau,\xi)$ où $\Phi \in \mathbf{R}_+\{\tau,\xi\}$, $\tau = \rho t$ et $\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j + L \sum_{i=1}^{q} z_i$, ρ et L étant des paramètres ≥ 1. L'espace et la norme associés à cette fonction majorante seront notés B_Φ et $\| \ \|$. Indiquons alors le choix de Φ. Nous noterons ϕ la fonction majorante

$$\phi(\xi) = e^{a\xi}\frac{1}{R-\xi}, \ R > 0, \ a \geq 1.$$

Étant donné un entier $s \geq m$, on pose ([12])

$$\Phi(\tau,\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \tau^p \frac{D^{sp}\phi(\xi)}{(sp)!}. \tag{2.6}$$

Cette série converge, d'après les inégalités de Cauchy, sur un voisinage compact de (τ,ξ) pour $|\tau| < r^s$ et $|\xi| < R - r$ quel que soit $r \in]0, R[$, soit pour $|\tau|^{1/s} + |\xi| < R$; Φ est donc bien une fonction majorante.

Nous utiliserons le lemme suivant dont la démonstration est déjà connue (voir [10]).

LEMME 2.3. *Pour tout $p, q \in \mathbf{N}$, on a*

a.
$$D^p\phi \ll a^{-q}D^{p+q}\phi,$$

b.
$$D^p\phi \ll \frac{p!}{(p+q)!}R^q D^{p+q}\phi.$$

Rappelons (proposition 6.1 de [5]) que, si $\phi \in \mathbf{R}_+\{\xi\}$ vérifie $0 \ll (R-\xi)\phi(\xi)$, alors

$$\frac{\eta R}{\eta R - \xi}\phi \ll \frac{\eta}{\eta - 1}\phi \text{ pour tout } \eta > 1. \tag{2.7}$$

Ici, nous aurons besoin du

LEMME 2.4. *Si $R \in]0,1]$, on a $\dfrac{\eta R}{\eta R - (\tau+\xi)}\Phi(\tau,\xi) \ll \dfrac{\eta}{\eta-1}\Phi(\tau,\xi)$ pour tout $\eta > 1$.*

PREUVE. En notant $\theta_j = D^j(\frac{\eta R}{\eta R - \bullet})/j!$ et $a_j = D^j\phi/j!$, cette inégalité s'écrit

$$\sum_{j=0}^{p} \theta_j a_{sp-sj} \ll \frac{\eta}{\eta-1}a_{sp}.$$

On remarque que $\sum_{j=0}^{p} \theta_j a_{sp-sj} \ll \sum_{j=0}^{sp} \theta_j a_{sp-sj} \ll \sum_{j=0}^{sp} \theta_j R^{(s-1)j} a_{sp-j}$ d'après le lemme 2.3-*b*. Si $R \in]0,1]$, on a donc $\sum_{j=0}^{p} \theta_j a_{sp-sj} \ll \sum_{j=0}^{sp} \theta_j a_{sp-j}$ car $s \geq m \geq 1$. L'inégalité voulue s'obtient alors en dérivant (2.7) à l'ordre sp, d'où le lemme. □

Nous sommes maintenant en mesure de contrôler la norme de $\mathcal{A}$ dans l'espace B_Φ. Soient $\eta > 1$ et $R_0 \in]0,1]$ satisfaisant aux hypothèses du théorème 2.1. Dans les majorations qui vont suivre, toute constante qui dépend des paramètres c_0, η, R_0 déjà fixés, sera notée c, sauf mention expresse du contraire. Soient $R \in]0, R_0]$, $r \in]0, R]$ et $\mu \geq 1$, nous prendrons

$$\rho = \mu \frac{R}{r} \geq 1.$$

D'après les inégalités de Cauchy, on a

$$a_{l\beta\gamma} \ll \sup_{\mathcal{D}_{\eta R_0} \times \Delta_{\eta R_0}} |a_{l\beta\gamma}| \, \frac{\eta r}{\eta r - t} \frac{\eta R}{\eta R - \sum_{j=1}^{n} x_j}$$

où

$$\frac{\eta r}{\eta r - t} = \frac{\eta R}{\eta R - \frac{R}{r} t} \ll \frac{\eta R}{\eta R - \mu \frac{R}{r} t} = \frac{\eta R}{\eta R - \tau} \text{ car } \quad \mu \geq 1 \ ;$$

d'autre part, on a $1 \ll \dfrac{\eta R}{\eta R - \sum_{i=1}^{q} z_i} \ll \dfrac{\eta R}{\eta R - L \sum_{i=1}^{q} z_i}$ car $L \geq 1$, d'où

$$a_{l\beta\gamma} \ll \sup_{\mathcal{D}_{\eta R_0} \times \Delta_{\eta R_0}} |a_{l\beta\gamma}| \, \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}. \tag{2.8}$$

De même, on a

$$\varepsilon_l \ll \sup_{\Delta_{\eta R_0}} |\varepsilon_l| \, \frac{\eta R}{\eta R - (\tau + \xi)}. \tag{2.9}$$

Proposition 2.5. *Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $R \in]0, R_0]$, l'opérateur $\mathcal{A}$ induise un endomorphisme continu de l'espace de Banach B_Φ de norme $\leq 1/2 + c\rho^{-1}\Big(L^m K + \dfrac{L^{m-1} M}{a}\Big)$.*

Preuve. Il résulte de la définition (2.4) de $\mathcal{P}^{-1}$ que

$$t^l D_t^l D^\beta D_z^\gamma \mathcal{P}^{-1} u = \sum_{k \geq l} \frac{t^k}{k!} \frac{k!}{(k-l)!} \frac{D^\beta D_z^\gamma D_t^k u(z,0,x)}{\mathcal{P}(0,k)}.$$

D'autre part,

$$u \ll \| u \| \Phi(\tau, \xi) \Rightarrow D^\beta D_z^\gamma D_t^k u(z,0,x) \ll \| u \| L^{|\gamma|} \rho^k k! \frac{D^{sk+|\beta|+|\gamma|}\phi(\xi)}{(sk)!}.$$

Étant donné que $|\beta| + |\gamma| \leq m \leq s$, d'après le lemme 2.3, on a

$$D^{sk+|\beta|+|\gamma|}\phi \ll \frac{R^{s-(m-l)}}{a^{m-(l+|\beta|+|\gamma|)}} (sk+m-l)! \frac{D^{s(k+1)}}{(s(k+1))!}\phi.$$

Vu le lemme 2.2-a, on a $\frac{k!(sk+m-l)!}{(k-l)!(sk)!|\mathcal{P}(0,k)|} \leq \frac{k^l (sk+m)^{m-l}}{c_0 \max(1,k^m)} \leq c$; on en déduit

$$t^l D_t^l D^\beta D_z^\gamma \mathcal{P}^{-1} u \ll \| u \| \frac{cL^{|\gamma|}}{a^{m-(l+|\beta|+|\gamma|)}} \sum_{k \in \mathbf{N}} (\rho t)^k \frac{D^{s(k+1)}\phi}{(s(k+1))!}$$

($R \leq 1$ et $s - (m-l) \geq 0$), d'où en multipliant par $t = \rho^{-1}\tau$,

$$\begin{aligned} t^{1+l} D_t^l D^\beta D_z^\gamma \mathcal{P}^{-1} u &\ll \| u \| \frac{c\rho^{-1} L^{|\gamma|}}{a^{m-(l+|\beta|+|\gamma|)}} \sum_{k \in \mathbf{N}} \tau^{k+1} \frac{D^{s(k+1)}\phi}{(s(k+1))!} \\ &\ll \| u \| \frac{c\rho^{-1} L^{|\gamma|}}{a^{m-(l+|\beta|+|\gamma|)}} \Phi. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on vérifie aisément que

$$u \ll \Phi \Rightarrow t^l D_t^l \mathcal{P}^{-1} u \ll c\Phi, \quad 0 \leq l \leq m \quad (c = 1/c_0).$$

D'après (2.8), (2.9) et le lemme 2.4, on a donc bien $\| \mathcal{A}u \| \leq \| u \| [1/2 + c\rho^{-1}\Big(L^m K + \frac{L^{m-1}M}{a}\Big)]\Phi$. $\square$

Afin d'en déduire le théorème 2.1, choisissons une fois pour toutes l'entier $s = m$.

Preuve du Théorème 2.1. Posons $c_1 = (1+2cK)$. Soient $R \in]0, R_0]$, $0 < \omega \leq r \leq R$ et v une fonction holomorphe dans $D_\omega \times \mathcal{D}_r \times \Delta_R$; en utilisant les polydisques $D_{\omega'} \times \mathcal{D}_{r'} \times \Delta_{R'}$ où $0 < \omega' < \omega$, $0 < r' < r$, $0 < R' < R$ avec $0 < \omega' \leq r' \leq R'$, on remarque qu'il suffit de supposer v holomorphe et borné dans $D_\omega \times \mathcal{D}_r \times \Delta_R$. Posons alors

$$L = \frac{R}{\omega} \geq 1.$$

1. D'après la proposition 2.5, on a $\| \mathcal{A} \| \leq 1/2 + (\mu \frac{R}{r})^{-1} L^m (cK + \frac{cL^{-1}M}{a})$; en prenant $\mu = c_1 \frac{r}{R} L^m$, quantité ≥ 1 vu les définitions, et $a \geq 1$ tel que $\frac{cL^{-1}M}{a} < 1/2$, on obtient $\| \mathcal{A} \| < 1$. D'après les inégalités de Cauchy, on a

$$v \ll \sup_{D_\omega \times \mathcal{D}_r \times \Delta_R} |v| \frac{\omega}{\omega - \sum_{i=1}^{q} z_i} \frac{r}{r-t} \frac{R}{R - \sum_{j=1}^{n} x_j}$$

où

$$\frac{\omega}{\omega - \sum_{i=1}^{q} z_i} = \frac{R}{R - L \sum_{i=1}^{q} z_i} \quad \text{et}$$

$$\frac{r}{r-t} = \frac{R}{R - \frac{R}{r} t} \ll \frac{R}{R - \mu \frac{R}{r} t} = \frac{R}{R - \tau} \quad \text{car } \mu \geq 1,$$

d'où

$$v \ll \sup_{D_\omega \times \mathcal{D}_r \times \Delta_R} |v| \frac{R}{R - (\tau + \xi)}.$$

D'après le lemme 2.3-b,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R - (\tau+\xi)} &\ll \phi(\tau + \xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \tau^p \frac{D^p \phi(\xi)}{p!} \ll \sum_{p=0}^{\infty} \tau^p R^{(s-1)p} \frac{D^{sp}\phi(\xi)}{(sp)!} \\ &\ll \sum_{p=0}^{\infty} \tau^p \frac{D^{sp}\phi(\xi)}{(sp)!} = \Phi(\tau, \xi) \end{aligned}$$

car $R \leq 1$. Ceci montre en particulier que v appartient à B_Φ où $\| v \| \leq R \sup_{D_\omega \times \mathcal{D}_r \times \Delta_R} |v|$. Par conséquent, $u = (I - \mathcal{A})^{-1} v$ est une solution de l'équation (2.2) ; cette solution appartient à l'espace B_Φ, elle est holomorphe pour $|\tau|^{1/s}+|\xi|<R$, donc pour $|\rho t|^{1/s}+\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|+L\sum\limits_{i=1}^{q}|z_i|<R$ c'est-à-dire pour

$$\frac{(c_1|t|)^{1/m}}{\omega}+\sum_{j=1}^{n}\frac{|x_j|}{R}+\sum_{i=1}^{q}\frac{|z_i|}{\omega}<1.$$

On a également l'unicité car, si $u=\mathcal{A}u$ est une fonction holomorphe au voisinage de $(z,t,x)=0$, on peut choisir $R\in]0,R_0]$ puis $0<\omega\le r\le R$, $\mu\ge 1$, $a\ge 1$ tels que $\|\ \mathcal{A}\ \|<1$ et $u\in B_\Phi$, d'où $u=0$, ce qui termine la démonstration du point 1.

2. Losrque $K=0$, on a $\|\ \mathcal{A}\ \|\le 1/2+\dfrac{cL^{m-1}M}{a}$ car $\rho\ge 1$; en prenant $\mu=1$ et $a\ge 1$ tel que $\dfrac{cL^{m-1}M}{a}<1/2$, on obtient $\|\ \mathcal{A}\ \|<1$. Comme précèdemment, u est holomorphe pour $|\rho t|^{1/s}+\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|+L\sum\limits_{i=1}^{q}|z_i|<R$ c'est-à-dire pour $((\frac{R}{r}|t|)^{1/m}+\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|)\frac{1}{R}+\sum\limits_{i=1}^{q}\frac{|z_i|}{\omega}<1$, d'où le théorème 2.1. □

REMARQUE 2.6. La méthode utilisée dans ce paragraphe permet de retrouver un théorème de [1] lorsque $p_0=p$. Expliquons brièvement comment ceci est possible. En écrivant l'inconnue de (1.1) sous la forme $\sum\limits_{h=0}^{p-1}\frac{t^h}{h!}w_h(x)+t^pu(t,x)$, on se ramène à l'équation $\mathcal{C}(x,tD_t+p)u=\sum\limits_{\substack{l+|\alpha|\le m,l<m\\ l-p\le j\le l}}a_{l\alpha}c_{lj}t^{1+j+\nu}D_t^jD^\alpha u+v'$ où v' possède les mêmes propriétés que les fonctions initiales (w_h) et v ; cette équation est du même type que (2.2). En choisissant $\eta>1$ et $R_0\in]0,1]$ comme dans le théorème 2.1. et en supprimant simplement q, z, γ, D_z^γ, ω, D_ω, $\mathcal{U}$ et L, la proposition 2.5 conclut que $\|\ \mathcal{A}\ \|\le 1/2+c\rho^{-1}(K+\dfrac{M}{a})\le 1/2+c\mu^{-1}(K+\dfrac{M}{a})$ car $\rho\ge\mu$; en prenant $\mu=c_1$ et $a\ge 1$ tel que $\dfrac{cM}{a}<1/2$, on obtient $\|\ \mathcal{A}\ \|<1$. On en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 2.7. *Soient $\eta>1$, il existe $R_0\in]0,1]$ tel que la propriété suivante soit vérifiée. Si les coefficients $a_{l\alpha}$ sont holomorphes et bornés dans $\mathcal{D}_{\eta R_0}\times\Delta_{\eta R_0}$ par K pour $l+|\alpha|=m$ et par M pour $l+|\alpha|<m$. Il existe $c_1=c_1(\eta,R_0,K)\ge 1$ (indépendant de M) tel que : soient $R\in]0,R_0]$,*

$0 < r \leq R$, $(w_h)_{0\leq h<p}$ et v des fonctions holomorphes dans $\mathcal{D}_r$ et $\mathcal{D}_r \times \Delta_R$ respectivement, alors on a les conclusions suivantes.
1. *Le problème de Cauchy* (1.1) *admet une unique solution u holomorphe pour $(c_1 \dfrac{R}{r}|t|)^{1/m} + \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| < R$.*
2. *Lorsque $K = 0$, u est holomorphe pour $(\dfrac{R}{r}|t|)^{1/m} + \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| < R$.*

3. Preuve du Théorème 1.1

Vu que $(\mathbf{C} \times \Omega)_{cd} \cap S = \Omega - V$, chaque germe $D_t^k v(0, \bullet)$ au point a se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega - V)$ et, dans tous les cas, la formule (1.13) montre qu'il en est de même des germes u_k. En posant $U_0(t, x) = \sum\limits_{k<p_0} u_k(x)t^k$, on définit donc un germe au point $(0, a)$ qui se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\mathbf{C} \times \Omega - V)$. En prenant $U = u - U_0$ comme nouvelle inconnue, on se ramène, vu (1.11), au problème

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{C}(x, tD_t)U = \sum_{\substack{l+|\alpha|\leq m\\ l<m}} a_{l\alpha}(t, x)t^{1+l+\nu} D_t^l D^\alpha U + W,\\
&U \text{ s'annule } p_0 \text{ fois sur } S,
\end{aligned}
\right.
\tag{3.1}
$$

où

$$
W = -\mathcal{C}(x, tD_t)U_0 + \sum_{\substack{l+|\alpha|\leq m\\ l<m}} a_{l\alpha} t^{1+l+\nu} D_t^l D^\alpha U_0 + t^p v
\tag{3.2}
$$

s'annule p_0 fois sur S d'après (1.13). Ce germe W au point $(0, a)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur le revêtement universel de $(\mathbf{C} \times \Omega)_{cd} \subset \mathbf{C} \times \Omega - V$. On en déduit que W est de la forme

$$
W(t, x) = t^{p_0} w(t, x)
\tag{3.3}
$$

où w est un germe au point $(0, a)$ qui se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}((\mathbf{C} \times \Omega)_{cd})$. En écrivant l'inconnue de (3.1) sous la forme $t^{p_0} u(t, x)$ et en utilisant les relations

$$
\mathcal{C}(x, tD_t)t^{p_0} u = t^{p_0} \mathcal{C}(x, tD_t + p_0)u,
$$

$$
D_t^l(t^{p_0} u) = \sum_{l-p_0\leq j\leq l} c_{lj} t^{p_0-l+j} D_t^j u, \ c_{lj} \in \mathbf{N},
$$

on obtient

$$t^{p_0}\mathcal{C}(x, tD_t + p_0)u = t^{p_0} \sum_{\substack{l+|\alpha|\le m, l<m \\ l-p_0\le j\le l}} a_{l\alpha} c_{lj} t^{1+j+\nu} D_t^j D^\alpha u + t^{p_0} w$$

soit

$$\mathcal{C}(x, tD_t + p_0)u = \sum_{\substack{l+|\alpha|\le m, l<m \\ l-p_0\le j\le l}} a_{l\alpha} c_{lj} t^{1+j+\nu} D_t^j D^\alpha u + w. \tag{3.4}$$

REMARQUE 3.1. Vu que $c_{ll} = 1$, on observe que le symbole principal de cet opérateur est égal à celui de (1.1) multiplié par t^p, soit à $a_m(x)t^m D_t^m - \sum_{\substack{l+|\alpha|=m \\ l<m}} a_{l\alpha}(t,x) t^{\max(p,1+l)} D_t^l D^\alpha$.

Finalement, en changeant de notation, nous avons réduit le problème initial (1.1) à une équation de la forme

$$\mathcal{P}(x, tD_t)u = \sum_{\substack{l+|\alpha|\le m \\ l<m}} a_{l\alpha}(t,x) t^{1+l} D_t^l D^\alpha u + w \tag{3.5}$$

de symbole principal celui de la remarque ci-dessus ; équation pour laquelle on a

$$p = 0 = p_0$$

mais dont le second membre $w \in \mathcal{H}(\mathcal{R}((\mathbf{C} \times \Omega)_{cd}))$ présente des singularités sur V.

Note. Indiquons qu'une telle équation admet au voisinage de tout point $(0, a)$, $a \in \Omega - V$, une unique solution formelle de type (1.12) d'après le lemme 1.4.

L'application $\tilde{w}\ :\ (z, t, x) \mapsto w(t, z)$ définit un germe au point $(a, 0, a)$ qui se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\{(z,t) \in \Omega \times \mathbf{C};\ |t| < cd(z)\}) \times \Omega$; de plus, on a

$$w(t, x) = \tilde{w}(z, t, x)_{|z=x} \quad \text{pour tout } (t, x) \in (\mathbf{C} \times \Omega)_{cd}. \tag{3.6}$$

Cherchons alors la solution u de (3.5) sous la forme

$$u(t,x) = \tilde{u}(z,t,x)_{|z=x} \tag{3.7}$$

où $\tilde{u}$ est un germe au point $(a,0,a)$.

Étant donné que $D_j\tilde{u}(x,t,x) = (D_j + D_{z_j})\tilde{u}(z,t,x)_{|z=x}$, on montre aisément le lemme suivant.

Lemme 3.2. *Soient $\alpha \in \mathbf{N}^n$, il existe des opérateurs différentiels linéaires $P_\gamma(x,D)$, $|\gamma| \leq |\alpha|$, d'ordre $\leq |\alpha| - |\gamma|$ à coefficients holomorphes dans Ω_0 tels que, pour tout $a \in \Omega_0$ et toute fonction $\tilde{u}(z,t,x)$ holomorphe au voisinage du point $(a,0,a)$, on ait*

$$D^\alpha\tilde{u}(,t,x) = \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|} P_\gamma(x,D)D_z^\gamma\tilde{u}(z,t,x)_{|z=x} \text{ pour } (t,x) \text{ voisin de } (0,a).$$

D'autre part, on a $D_t u = D_t\tilde{u}$; l'équation (3.5) sera donc vérifiée si

$$\mathcal{P}(x,tD_t)\tilde{u} = \sum_{\substack{l+|\alpha|\leq m,\ l<m \\ |\gamma|\leq|\alpha|}} a_{l\alpha}(t,x)t^{1+l}D_t^l P_\gamma(x,D)D_z^\gamma\tilde{u} + \tilde{w}.$$

En écrivant $P_\gamma(x,D) = \sum_{|\beta|\leq|\alpha|-|\gamma|} a_{\beta\gamma}(x)D^\beta$, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(x,tD_t)\tilde{u} = \sum_{\substack{l+|\alpha|\leq m, l<m \\ |\gamma|\leq|\alpha|, |\beta|\leq|\alpha|-|\gamma|}} a_{l\alpha\beta\gamma}(t,x)t^{1+l}D_t^l D^\beta D_z^\gamma\tilde{u} + \tilde{w} \quad \text{où} \\ &a_{l\alpha\beta\gamma}(t,x) = a_{l\alpha}(t,x) \times a_{\beta\gamma}(x) \end{aligned} \tag{3.8}$$

soit, en changeant de notation, une équation de la même forme que (2.2) avec $q = n$, à coefficients holomorphes dans $\mathcal{D}_0 \times \Omega_0$ où v désigne le germe $\tilde{w}$.

Tout ce qui précède montre que le théorème 1.1 résulte de la proposition suivante.

Proposition 4.1. *On suppose $q = n$. Soit $c > 0$, il existe $\kappa > 0$ et, pour tout voisinage ouvert Ω de l'origine de $\mathbf{C}^n$ et tout $\delta > 0$, un voisinage ouvert $\Omega' \subset \Omega \cap \Omega_0$ de l'origine de $\mathbf{C}^n$ et $\delta' > 0$ tels que : soient $b \in D_{\delta'} - V$ et v un germe au point $(z,t) = (b,0)$, $x = 0$ se prolongeant en une fonction* *holomorphe sur* $\mathcal{R}(\{(z,t) \in D_\delta \times \mathbf{C};\ |t| < cd(z)\}) \times \Omega$*, alors il existe un unique germe* u*, au même point, qui vérifie* (2.2) *et qui se prolonge en une fonction holomorphe sur* $\mathcal{R}(\{(z,t) \in D_{\delta'} \times \mathbf{C};\ |t| < \kappa d(z)^m\}) \times \Omega'$.

Preuve. Fixons des paramètres $\eta > 1$ et $R_0 \in]0,1]$ conformément au théorème 2.1 ; ce théorème leur associe un réel $c_1 > 0$. Étant donné $c > 0$, on pose

$$\tau \equiv \frac{c}{1+c} \in]0,1[\quad \text{et} \quad \kappa \equiv \frac{\tau^m}{2^m c_1} > 0.$$

Soient Ω un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{C}^n$ et $\delta > 0$, on choisit $R \in]0, R_0]$ tel que $\Delta_R \subset \Omega$, on pose

$$\Omega' = \{x \in \mathbf{C}^n;\ \sum_{j=1}^n |x_j| < \frac{R}{2}\} \quad \text{et} \quad \delta' = \min(R, \frac{\delta}{2}).$$

Si $b \in D_{\delta'} - V$, on note $\Delta_{b,\tau}$ le polydisque $\Delta_{b,\tau} = \{(z,t) \in \mathbf{C}^{n+1};\ \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - b_i|,\ |t| < \tau d(b)\}$ et on pose

$$r = \omega \equiv \omega(b) = \tau d(b).$$

Dans ces conditions, on a bien $0 < \omega \leq r < R$ car $\tau d(b) < d(b) < \delta'$ vu que $0 \in V$. En utilisant la translation $z \mapsto z + b$ qui laisse invariante l'équation (2.2), on déduit du théorème 2.1 que, pour tout $b \in D_{\delta'} - V$ et pour toute fonction v holomorphe dans $\Delta_{b,\tau} \times \Delta_R$, l'équation (2.2) admet une unique solution u holomorphe pour

$$\frac{(c_1|t|)^{1/m}}{\tau d(b)} + \sum_{j=1}^n \frac{|x_j|}{R} + \sum_{i=1}^n \frac{|z_i - b_i|}{\tau d(b)} < 1,$$

a fortiori, dans $\diamondsuit_{b,\tau} \times \Omega'$ où $\diamondsuit_{b,\tau} = \{(z,t) \in \mathbf{C}^{n+1};\ (c_1|t|)^{1/m} + \sum_{i=1}^n |z_i - b_i| < \frac{\tau d(b)}{2}\}$. Nous allons utiliser les inclusions

$$\begin{aligned} \{(z,t) \in D_{\delta'} \times \mathbf{C};\ |t| < \kappa d(z)^m\} \quad &\subset \quad \bigcup_{b \in D_{\delta'} - V} \diamondsuit_{b,\tau} \subset \bigcup_{b \in D_{\delta'} - V} \Delta_{b,\tau} \\ &\subset \quad \{(z,t) \in D_{2\delta'} \times \mathbf{C};\ |t| < cd(z)\}. \end{aligned}$$

En effet, soit $(z,t) \in D_{\delta'} \times \mathbf{C}$ tel que $|t| < \kappa d(z)^m$, alors $z \in D_{\delta'} - V$ et en prenant $b = z$, on a $(c_1|t|)^{1/m} + \sum_{i=1}^n |z_i - b_i| = (c_1|t|)^{1/m} < (c_1\kappa)^{1/m} d(z) =$

$\frac{\tau d(b)}{2}$ ce qui prouve que $(z,t) \in \diamondsuit_{b,\tau}$. La seconde inclusion résulte de $|t| \leq c_1|t| \leq (c_1|t|)^{1/m} < \tau d(b)/2$ car $c_1 \geq 1$ et $\tau d(b)/2 < 1$; vérifions la dernière. On a $|z_i - b_i| < \tau d(b)$ et $|t| < \tau d(b)$, de plus $|d(z) - d(b)| \leq d(z,b) = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - b_i|$, d'où $(1-\tau)d(b) < d(z)$ et $|t| < \frac{\tau}{1-\tau} d(z) = cd(z)$; d'autre part, $|z_i| \leq \tau d(b) + |b_i| < d(b) + |b_i| < 2\delta'$.

On peut alors démontrer la proposition 4.1. Soit $b \in D_{\delta'} - V$, le germe v au point $(z,t) = (b,0)$, $x = 0$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\{(z,t) \in D_{2\delta'} \times \mathbf{C};\ |t| < cd(z)\}) \times \Delta_R$ car $2\delta' \leq \delta$. Soit $\gamma\ :\ [0,1] \to \{(z,t) \in D_{\delta'} \times \mathbf{C};\ |t| < \kappa d(z)^m\}$ un chemin d'origine $(b,0)$. Il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ et des $b^k \in D_{\delta'} - V$ tels que $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset \diamondsuit_{b^k,\tau}$ pour $0 \leq k \leq N$. Le germe v se prolonge en une fonction holomorphe $v_1 \in \mathcal{H}(\Delta_{b^0,\tau} \times \Delta_R)$; le germe u, solution de l'équation (2.2), définit donc une fonction holomorphe $u_1 \in \mathcal{H}(\diamondsuit_{b^0,\tau} \times \Omega')$. La fonction v_1 définit un germe de fonction holomorphe au point $(\gamma(t_1), 0)$ qui se prolonge en une fonction holomorphe $v_2 \in \mathcal{H}(\Delta_{b^1,\tau} \times \Delta_R)$ à laquelle on associe la solution $u_2 \in \mathcal{H}(\diamondsuit_{b^1,\tau} \times \Omega')$ de l'équation (2.2) correspondante. On a $v_1 = v_2$ sur l'ouvert connexe $(\diamondsuit_{b^0,\tau} \cap \diamondsuit_{b^1,\tau}) \times \Delta_R$ qui contient le point $(\gamma(t_1), 0)$. En effet, on peut toujours relier deux points (z,t) et (z',t') dans $\diamondsuit_{b^0,\tau} \cap \diamondsuit_{b^1,\tau}$ par des segments passant par les points $(z,0)$ et $(z',0)$. On en déduit que $u_1 = u_2$ dans $(\diamondsuit_{b^0,\tau} \cap \diamondsuit_{b^1,\tau}) \times \Omega'$. En répétant le raisonnement, on montre par récurrence finie, que le germe u se prolonge bien en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\{(z,t) \in D_{\delta'} \times \mathbf{C};\ |t| < \kappa d(z)^m\}) \times \Omega'$, d'où la proposition 4.1 et par conséquent le théorème 1.1. $\square$

Bibliographie

[1] Baouendi, M. S. and C. Goulaouic, Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, Comm. on Pure and Appl. Math. **26** (1973), 455–475.

[2] Derrab, F., Nabaji, A., Pongérard, P. et C. Wagschal, Problème de Cauchy fuchsien dans des espaces de Gevrey, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **11** (2004), 401–424.

[3] Fujiié, S., Représentation hypergéométrique des singularités de la solution du problème de Cauchy caractéristique à données holomorphes, Comm. in Partial Diff. Eq. **18**(9 & 10), (1993), 1589–1629.

[4] Garding, L., Kotake, T. et J. Leray, Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème linéaire, à données holomorphes; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées, Bull. Soc. Math.

France **92** (1964), 263–361.

[5] Hamada, Y., Leray, J. et C. Wagschal, Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples: problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité partielle, J. Math. Pures et Appl. **55** (1976), 297–352.

[6] Hasegawa, Y., On the initial-value problems with data on a characteristic hypersurface, J. Math. Kyoto Univ. **13**(3), (1973), 579–593.

[7] Leray, J., Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 389–429.

[8] Ouchi, S., Singularities of solutions of equations with noinvolutive characteristics-I; the case of second order Fuchsian equations, J. Math. Soc. Japan **45**(2), (1993), 215–251.

[9] Pongérard, P., Un résultat de ramification globale, C.R.A.S. (1997), 863–865.

[10] Pongérard, P. et C. Wagschal, Ramification non abélienne, J. Math. Pures et Appl. (1999), 51–88.

[11] Pongérard, P., Sur une classe d'équations de Fuchs non linéaires, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **7** (2000), 423–448.

[12] Pongérard, P., Problème de Cauchy caractéristique à solution entière, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **8** (2001), 89–105.

[13] Yamane, H., Singularities in Fuchsian Cauchy Problems with holomorphic data, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **34** (1998), 179–190.

[14] Urabe, J., Meromorphic representations of the solutions of the singular Cauchy problem II, J. Math. Kyoto Univ. **28**(2), (1988), 335–342.

(Received March 11, 2005)

23 allée des rubis
97400 Saint-Denis
La Réunion, France
E-mail: Marc-Patrice.Pongerard@univ-reunion.fr