J. Math. Sci. Univ. Tokyo
9 (2002), 279–301.

Fonction L de Hasse-Weil d'une Variété Abélienne sur un Corps de Fonction Algébrique à Réduction Semi-stable

By Fabien Trihan*

Abstract. In the Birch/Swinnerton-Dyer conjecture, one studies the behaviour of the Hasse-Weil L-function of an abelian variety. In the case of function fields of characteristic $p > 0$, one needs to know the p-adic valuation of the leading coefficient of this function at $s = 1$ and therefore, needs a Grothendieck-type cohomological interpretation of it in terms of a "good" p-adic cohomology (integral if possible) as it was shown in [Ba] in the good reduction case. We give such interpretation in the semi-abelian, semi-stable and then potentially semi-abelian case and obtain as a bonus a description of the cohomology of a quasi-unipotent isocrystal (in the sense of [Cr4]) over a smooth affine curve.

0. Introduction

Soit F un corps de fonction algébrique en une variable, de corps des constantes $\mathbf{F}_q$, $q = p^r$ et A_F/F une variété abélienne. Celle-ci a presque partout bonne réduction, i.e. il existe un ouvert dense U de S, le modèle de F, tel que A_F se prolonge en un schéma abélien A/U. On sait (cf [S]) que la fonction L de Hasse-Weil de A_F/F est méromorphe et possède une expression en terme de cohomologie de la représentation $l-$adique associée à la composante neutre du modèle de Néron de A_F. La conjecture de Birch/Swinnerton-Dyer décrit le comportement de cette fonction en $s = 1$ grâce à des invariants arithmétiques de A_F (cf [S] ou [Ba] pour un exposé précis de la question). Cette conjecture a été résolue par [Ba] dans le cas de bonne réduction et l'interprétation de la valuation p-adique du coefficient dominant de la fonction en $s = 1$ nécessite de passer par une cohomologie p-adique et entière (c'est à dire avant tensorisation par $\mathbf{Q}$). Nous nous proposons de donner une telle expression dans le cas où la variété a

1991 *Mathematics Subject Classification.* 14F30.

*Research fellow of the Japan Society for the Promotion of Science.

réduction semi-abélienne (i.e. semi-stable au sens [SGA7]), semi-stable (au sens [H-K]), voire potentiellement semi-abélienne. Supposons ainsi que la variété abélienne soit à réduction semi-abélienne sur S. Kato a montré (non-publié!) dans ce cas que A_F/F se relève en un log-groupe p-divisible. Nous montrons que ceci est suffisant pour établir la surconvergence du cristal de Dieudonné de A/U (cf [B-B-M] et [Be] pour ces notions) et en déduire une expression de la fonction L (tout au moins en les points de bonne réduction) en terme de cohomologie log-cristalline. Dans la deuxième partie, l'étude du modèle de Néron de A_F nous permet de donner également une expression de cette fonction en les points de mauvaise réduction. Dans la troisième partie, nous supposons que la variété abelienne possède un modèle X/S propre et semi-stable. On peut alors associer à celui-ci un log-isocristal convergent dont la restriction à U n'est autre que le cristal de Dieudonné de A. Nous en déduisons une expression de la fonction L de A_F en terme de cohomologie rigide. L'étude en les points de mauvaise réduction s'avère plus délicate et nous n'obtenons des résultats que dans le cas des courbes elliptiques. Nous regardons enfin dans la dernière partie le cas de la réduction potentiellement semi-abélienne. Nous démontrons la surconvergence du cristal de Dieudonné de A et donnons une expression p-adique de la fonction L. A cette occasion, nous redémontrons le résultat de [Cr4] selon lequel la cohomologie des F-isocristaux quasi-unipotents sur une courbe affine lisse est de dimension finie. Pour finir, nous reportons le lecteur à [E3] où la question de la surconvergence du cristal associé à un schéma abélien est traitée par d'autres méthodes et sous des hypothèses plus générales que les notres.

L'auteur tient à remercier B. Edixhoven, K. Kato, M. Kisin et B. Le Stum pour de fructueuses conversations, ainsi que le reféré pour ces judicieuses remarques.

1. Fonction L d'un Schéma Abélien à Réduction Semi-abélienne

(1.1) Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrête complet, d'inégales caractéristiques $(0,p)$, de corps résiduel k muni d'un relèvement σ du frobenius de k et d'indice de ramification e inférieur ou égal à $p-1$. Soit $X^\sharp$ un k-log-schéma fin et saturé, où k est muni de la log-structure triviale. Pour un tel log-schéma $X^\sharp$, on notera X^* l'ouvert de X sur lequel la log-structure de $X^\sharp$ est triviale et $j : X^* \hookrightarrow X^\sharp$, l'immersion ouverte canonique. Soit E un F-cristal faiblement non-dégénéré, i.e. muni d'une action de Frobenius qui devient non-dégénérée sur X^* ([LS-T, 2.0]), localement libre de rang fini sur $X^\sharp/(\mathcal{V},\sigma)$, où $\mathcal{V}$ est muni de la log-structure triviale. Alors on peut associer à E un F-isocristal sur $X^*/(K,\sigma)$ surconvergent le long de $X \setminus X^*$ $E^\dagger$ d'après [LS-T, 2.7]. Nous noterons d'autre part $E|_{X^*}$ la restriction de E au site cristallin usuel sur $X^*/\mathcal{V}$. La même construction [LS-T, 2.7], qui correspond dans ce cas à celle de [Be, 2.4] permet d'associer à $E|_{X^*}$ un F-isocristal convergent sur $X^*/(K,\sigma)$, que l'on note E_K. La construction étant fonctorielle, on en déduit que E_K est la restriction de $E^\dagger$ à $]X^*[$.

(1.2) Soit F un corps de fonction algébrique en une variable, de corps des constantes $\mathbf{F}_q$, $q = p^r$. Soient $\bar{F}$ et $\bar{\mathbf{F}}_q$ une clôture algébrique de F et $\mathbf{F}_q$ et $\varphi \in Gal(\bar{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$, le Frobenius arithmétique. Soient $S/\mathbf{F}_q$ la courbe lisse, projective et entière qui est le modèle de F et $|S|$, l'ensemble de ses points fermés. Pour un tel point x, de corps résiduel $k(x)$, on note $deg(x) := [k(x) : \mathbf{F}_q]$ et $I_x \subset Gal(\bar{F}/F)$ un groupe d'inertie en x (défini à conjugaison près). Soient A_F une variété abélienne sur F et $A_{\bar{F}} := A_F \times_F \bar{F}$. On appelle fonction L de Hasse-Weil de A_F/F la fonction définie par :

$$L_{A_F}(s) := \prod_{x \in |S|} det(1 - q^{-sdeg(x)}\varphi^{-deg(x)}, H^1_{et}(A_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_l)^{I_x})^{-1}.$$

Cette fonction est méromorphe et peut s'exprimer comme un produit fini de polynômes caractéristiques de l'action de Frobenius sur les groupes de cohomologie de la représentation $l-$adique associée au modèle de Néron de A_F ([S, satz 1]).

Nous savons d'après [B-L-R] que A_F a bonne réduction presque partout sur S, i.e. se relève en un schéma abélien A/U, où U est le complémentaire dans S des points $x_1, ..., x_r$ de mauvaises réductions. Notons $S^\sharp$ le log-schéma fin S muni de la log-structure induite par le diviseur à croisements normaux donné par les points de mauvaises réductions. Supposons à présent que A_F a réduction semi-abélienne, i.e. que pour tout point fermé x de S, la fibre en x du modèle de Néron de A_F est une extension d'un tore par une variété abélienne. D'après un résultat de Kato [I, 3.3], A_F/F se relève dans ce cas en un log-groupe p-divisible $G^\sharp/S^\sharp$ auquel on peut associer un F-cristal non-dégénéré $\mathbf{D}(G^\sharp)$ localement libre de rang fini sur $S^\sharp/W(\mathbf{F}_q)$, où $W(\mathbf{F}_q)$ est muni de la log-structure triviale. Sa restriction au site cristallin $U/W(\mathbf{F}_q)$ est le cristal de Dieudonné cristallin $\mathbf{D}(A)$ ([B-B-M,2.5]).

On notera $K := FracW(\mathbf{F}_q)$, $\mathbf{D}(A)_K$, l'isocristal convergent sur U/K et $\mathbf{D}(A)^\dagger$ l'isocristal surconvergent sur U/K construit à l'aide de (1.1). Enfin on notera, en reprenant les notations de [Tr, 1.1], $L(U, \mathbf{D}(A), t)$, $L(U, \mathbf{D}(A)_K, t)$ et $L(U, \mathbf{D}(A)^\dagger, t)$ les fonctions L associées respectivement à $\mathbf{D}(A)$, $\mathbf{D}(A)_K$ et $\mathbf{D}(A)^\dagger$.

PROPOSITION 1.3. *Ces trois fonctions L sont égales et on a :*

$$L(U, \mathbf{D}(A), t) = \prod_{i=0}^{2} det_K(1 - t\phi^i, H^i_{rig,c}(U, \mathbf{D}(A)^\dagger))^{(-1)^{i+1}}$$

DÉMONSTRATION. (1.1) et [Tr, 1.2]. □

COROLLAIRE 1.4. *La fonction L de Hasse-Weil de A_F/F s'exprime sous la forme*

$$\begin{aligned} (1.4.1) \qquad L_{A_F}(s) = & \prod_{i=1}^{r} det(1 - q^{-sdeg(x_i)}\varphi^{-deg(x_i)}, H^1_{et}(A_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_l)^{I_{x_i}})^{-1} \\ & \times \prod_{i=0}^{2} det_K(1 - q^{-s}\phi^i, H^i_{rig,c}(U, \mathbf{D}(A)^\dagger))^{(-1)^{i+1}} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On peut en effet décomposer la fonction L de Hasse-Weil de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \prod_{x \in |S \backslash U|} det(1 - q^{-sdeg(x)}\varphi^{-deg(x)}, H^1_{et}(A_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_l)^{I_x})^{-1} \\ & \quad \times \prod_{x \in |U|} det(1 - q^{-sdeg(x)}\varphi^{-deg(x)}, H^1_{et}(A_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_l)^{I_x})^{-1}. \end{aligned}$$

Or d'après le critère de Néron-Ogg-Shafarevitch [S-T], l'action du groupe d'inertie sur la cohomologie est triviale en les points de U. D'autre part, d'après [Mi,VI,4.2], $H^1_{et}(A_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_l) = H^1_{et}(A_{\bar{x}}, \mathbf{Q}_l)$, pour tout point x de U. On déduit alors de [K-M], pour tout point fermé x de U, l'égalité :

$$\begin{aligned} & det(1 - t^{deg(x)}\varphi^{-deg(x)}, H^1(A_{\bar{x}}, \mathbf{Q}_l)) \\ & \quad = det(1 - t^{deg(x)}F_x, H^1_{cris}(A_x/W(k(x)))) \\ & \quad = det(1 - t^{deg(x)}F_x, D(A_x)), \end{aligned}$$

où $D(A_x)$ est la fibre en x de $\mathbf{D}(A)$ muni de l'action de Frobenius F_x induite par le Frobenius sur A_x qui élève à la puissance $|k(x)|$-ième les sections de son faisceau structural. Ainsi la partie de la fonction L_{A_F} sur U est bien égale à la fonction L de $\mathbf{D}(A)$. $\square$

Nous sommes en mesure de donner une expression entière de la fonction L de A_F en les points où la variété a bonne réduction. Rappelons tout d'abord le résultat de [LS-T].

PROPOSITION 1.5. *Soient $X^\sharp/W(k)$ propre, lisse et intègre, où la log-structure sur $X^\#$ est induit par un diviseur à croisement normaux union finie de composantes lisses. Soit $X_k^\sharp$ sa fibre spéciale, E un F-cristal non dégénéré localement libre de rang fini E sur $X_k^\sharp/W$ et $E^\dagger$ le F-isocristal surconvergent sur X_k^*/W associé. Alors le frobenius de $X_k^\sharp$ et celui de E induisent un endomorphisme F^i sur la cohomologie du cristal qui devient un automorphisme après tensorisation par K* (cf [H-K,3.2]). *De plus on a un isomorphisme de K-espaces vectoriels compatible aux actions de frobenius* :

$$H^i_{cris}(X_k^\sharp/W, E) \otimes K \simeq H^i_{rig}(X_k^*/K, E^\dagger).$$

DÉMONSTRATION. L'horizontalité du Frobenius de E par rapport à la connexion à pôles logarithmiques implique que les endomorphismes residus de celle-ci le long des composantes lisses du diviseur ont pour unique valeur propre 0. L'hypothèse de [LS-T, 4.2,(ii)] est ainsi satisfaite et l'assertion en résulte aussitôt. $\square$

Revenons à présent à nos hypothèses 1.2. On obtient alors le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.6.

$$L(U, \mathbf{D}(A), t) = \prod_{i=0}^{2} det_K(1 - tq\theta^i, H^i_{cris}(S^\sharp, \mathbf{D}(G^\sharp)^\vee))^{(-1)^{i+1}},$$

où θ^i est l'inverse de l'action de frobenius sur $\mathbf{D}(G^\sharp)^\vee$, le cristal dual de $\mathbf{D}(G^\sharp)$.

Démonstration. Comme U est lisse, on a d'après [E-LS]

$$L(U,\mathbf{D}(A),t)=\prod_{i=0}^{2} det_K(1-tq\theta^i,H^i_{rig}(U,\mathbf{D}(A)^{\dagger\vee}))^{(-1)^{i+1}}.$$

Comme le foncteur qui associe à un F-cristal sur $S^\sharp$ un F-isocristal surconvergent sur U respecte le *Hom*, on en déduit que $\mathbf{D}(G^\sharp)^\vee$ induit $\mathbf{D}(A)^{\dagger\vee}$. D'autre part la courbe $S/\mathbf{F}_q$ se relève en un schéma propre et lisse $\mathcal{S}/W(\mathbf{F}_q)$ d'après [SGA1,III,7.4]. On peut également relever la log-structure de S associée aux points de mauvaise réduction de manière à obtenir un schéma propre et log-lisse $\mathcal{S}^\sharp/W(\mathbf{F}_q)$. Il suffit en effet de montrer que l'on peut relever un point fermé x de S en un diviseur lisse de $\mathcal{S}$. Or $x/\mathbf{F}_q$ se relève en le schéma affine $\mathcal{D}:=Spec\,W(k(x))$ propre et lisse sur $Spec\,W(\mathbf{F}_q)$. Par lissité, le morphisme $x\to S$ se relève pour tout n en un morphisme $\mathcal{D}_n\to\mathcal{S}_n$ et par propreté ceux-ci induisent un morphisme $\mathcal{D}\to\mathcal{S}$. On vérifie aisément que $\mathcal{D}$ est le diviseur lisse de $\mathcal{S}$ souhaité. L'assertion résulte alors de 1.5. □

2. Etude en les Points de Mauvaise Réduction

Nous nous proposons de donner une expression p-adique de la fonction L de Hasse-Weil de A_F en les points de mauvaise réduction grâce aux propriétés de son modèle de Néron.

2.1 Nous conservons les hypothèses et notations 1.2. Le modèle de Néron G/S de A_F est semi-abélien, c'est à dire qu'en tout point fermé x de S, on a une suite exacte :

$$0\to T_x\to G^o_x\to B_x\to 0,$$

où G^o_x est la composante neutre de G_x, T_x est un tore et B_x une variété abélienne.

Soit $X(x):=Hom(T_x,\mathbf{G}_m)$, le groupe des caractères de T_x et S_r les points de S où le rang de $X(x)$ est égal à r. En posant pour tout r, G_r comme étant la restriction de G à S_r, on déduit de [C-F,p.13] que sur S_r, G_r est globalement extension d'un schéma abélien B_r par un tore T_r. La variété abélienne duale A'_F de A_F a elle aussi réduction semi-abélienne, de même rang torique et abélien ([SGA7,IX,2.2.7]). Ainsi si G'/S est le modèle de Néron de A'_F, G'_r est extension d'un schéma abélien B'_r (dual de B_r d'après [SGA7,IX]) par un tore T'_r. Posons pour tout r :

$$L_r(s) = \prod_{x \in |S_r|} det(1 - q^{-sdeg(x)} \varphi^{-deg(x)}, H^1_{et}(A_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_l)^{I_x})^{-1}.$$

On a donc avec cette définition :

$$L_{A_F}(s) = \prod_r L_r(s).$$

D'après [S,p.497], pour tout point x de S_r, $H^1_{et}(A_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_l)^{I_x} = V_l(G'^{o}_{r,\bar{x}})(-1)$. La suite exacte :

$$0 \to V_l(T'_{r,\bar{x}})(-1) \to V_l(G'^{o}_{r,\bar{x}})(-1) \to V_l(B'_{r,\bar{x}})(-1) \to 0,$$

permet alors de décomposer $L_r(s)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} L_r(s) = & \prod_{x \in |S_r|} det(1 - q^{-sdeg(x)} \varphi^{-deg(x)}, V_l(T'_{r,\bar{x}})(-1))^{-1} \\ & \times \prod_{x \in |S_r|} det(1 - q^{-sdeg(x)} \varphi^{-deg(x)}, V_l(B'_{r,\bar{x}})(-1))^{-1}. \end{aligned}$$

On note $L_{T'_r}(s)$ et $L_{B'_r}(s)$, les parties torique et abélienne de $L_r(s)$.

Remarque 2.2. Si $r > 0$, les F-isocristaux $\mathbf{D}(B_r)_K$ et $\mathbf{D}(T_r)_K$ sont surconvergents, puisque S_r est fini donc propre sur $\mathbf{F}_q$. Pour $r = 0$, S_0 est l'ouvert dense de S sur lequel A_F a bonne réduction. La surconvergence de $\mathbf{D}(B_0)_K$ résulte alors du paragraphe I.

Lemme 2.3. *Pour tout* r, *on a :*

$$L_{B'_r}(s) = \prod_{i=0}^{2dim(S_r)} det_K(1 - q^{-s}\phi^i, H^i_{rig,c}(S_r, \mathbf{D}(B_r)^\dagger))^{(-1)^{i+1}}.$$

Démonstration. On peut montrer en utilisant la suite de Kummer qu'on a un isomorphisme :

$$V_l(B'_{r,\bar{x}})(-1) \simeq H^1_{et}(B_{r,\bar{x}}, \mathbf{Q}_l).$$

On déduit alors de [K-M] et de manière analogue à 1.4 que :

$$det(1 - q^{-sdeg(x)}\varphi^{-deg(x)}, V_l(B'_{r,\bar{x}})(-1)) = det(1 - q^{-sdeg(x)}F_x, D(B_{r,x})).$$

Etant donné la surconvergence de $\mathbf{D}(B_r)_K$, l'assertion est alors immédiate. □

Lemme 2.4. *Soit $X(T'_r)$, le dual de Cartier de T'_r (qui est donc un groupe p-divisible étale), alors la partie torique de la fonction L de Hasse-Weil de A_F a pour expression :*

$$L_{T'_r}(s) = det_K(1 - q^{-s}\phi, H^0_{rig}(S_r, \mathbf{D}(X(T'_r))^\dagger))^{-1}.$$

Démonstration. D'après [SGA7], $V_l(T'_{r,\bar{x}})(-1) = X(T'_{r,\bar{x}})^\vee \otimes \mathbf{Q}_l$ où $X(T'_r)^\vee$ est le dual de Pontryagin de $X(T'_r)$. D'autre part, d'après [B-M,2.2.3], $X(T'_{r,x})^\vee \otimes K(x) \simeq \mathbf{D}(X(T'_{r,x})) \otimes K(x)$ où $K(x) = FracW(k(x))$. On en déduit que :

$$det(1 - q^{-sdeg(x)}\varphi^{-deg(x)}, V_l(T'_{r,\bar{x}})(-1)) = det(1 - q^{-sdeg(x)}F_x, D(X(T'_{r,x}))).$$

Or $D(X(T'_{r,x})) = D(X(T'_r)_x)$ et l'assertion est alors claire. □

On déduit immédiatement des lemmes 2.3 et 2.4 :

Théorème 2.5. *En reprenant les notations ci-dessus, la fonction L de Hasse-Weil de A_F a pour expression :*

$$\begin{aligned} L_{A_F}(s) = & \prod_{i=0}^{2} det(1 - q^{-s}\phi^i, H^i_{rig,c}(S_0, \mathbf{D}(B_0)^\dagger))^{(-1)^{i+1}} \\ & \times \prod_{r>0} (det(1 - q^{-s}\phi, H^0_{rig}(S_r, \mathbf{D}(B_r)^\dagger)). \\ & \qquad det(1 - q^{-s}\phi, H^0_{rig}(S_r, \mathbf{D}(X(T'_r))^\dagger)))^{(-1)} \end{aligned}$$

3. Log-isocristaux Convergents et Réduction Semi-stable

(3.1) Supposons que la variété abélienne A_F/F est à réduction semi-stable au sens [H-K], i.e. qu'elle admet un modèle propre X/S tel qu'en tout point x_i de mauvaise réduction, X_{x_i} soit un diviseur à croisement normaux de X. On en déduit un morphisme propre, log-lisse et de type Cartier $f : X^\sharp \to S^\sharp$, les log-structures sur S et X étant induites par les diviseurs à croisements normaux (x_i) et (X_{x_i}). On ne sait pas à priori si le faisceau cristallin $R^* f_{cris\ *}\mathcal{O}_{X^\sharp/W(\mathbf{F}_q)}$ est un cristal. Il nous faut donc passer par un autre coefficient : le log-isocristal convergent à la [O3] dont nous rappelons à présent la définition.

Définition 3.2. Soient k un corps parfait, W son anneau des vecteurs de Witt, $K = Frac(W)$ et $S^\sharp/k$ un k-log-schéma séparé, de type fini, fin et saturé.
(i) *Un élargissement de* $(S^\sharp/W)$ est un couple $(T^\sharp, s_T)$ où $T^\sharp$ est un log-schéma formel (pour la topologie p-adique) localement noethérien, de sous-schéma de définition S_T et s_T une flèche de $S_T^\sharp$ (où la log-structure sur S_T est la log-structure image inverse de $T^\sharp$) vers $S^\sharp$ tel que la log-structure de $S_T^\sharp$ soit isomorphe à l'image inverse de celle de $S^\sharp$ par s_T.
(ii) Si l'idéal de définition de T est $p.\mathcal{O}_T$ (resp. un idéal à puissances divisées) l'élargissement $(T^\sharp, s_T)$ de $(S^\sharp/W)$ sera appelé *élargissement p-adique* (resp. *p.d.-élargissement*).

les morphismes et les recouvrements d'élargissements sont définis de la manière habituelle ([O2]) et ceux-ci induisent le site $El(S^\sharp/W)$ (resp. $p - El(S^\sharp/W)$ et p.-d.-$El(S^\sharp/W)$).
(iii) Un *isocristal (p-adiquement) convergent E sur* $S^\sharp/W$ correspond à la donnée d'une famille E_T de $\mathcal{O}_T \otimes K$-modules cohérents indéxée sur le site $El(S^\sharp/W)$ $(p - El(S^\sharp/W))$ et pour tout morphisme $v : T' \to T$ de ce site, d'un isomorphisme $\Theta_v : v^*E_T \simeq E_{T'}$ vérifiant les conditions cocycles habituelles. On notera $Isoc(S^\sharp/W)$ la catégorie des isocristaux convergents sur $S^\sharp/W$.
(iv) On appelle *F-isocristal convergent sur* $S^\sharp/W$, un isocristal convergent E sur $S^\sharp/W$ muni d'un isomorphisme $\Phi : F^*E \to E$, où $F : S^\sharp \to S^\sharp$ est le Frobenius absolu de $S^\sharp$. Ceux-ci déterminent une catégorie que l'on notera $F - Isoc(S^\sharp/W)$.

Nous inspirant largement de [LS-T], nous montrons à présent comment associer à un (log-)isocristal convergent un isocristal surconvergent. Nous conservons les hypothèses et notations de (3.2).

Proposition 3.3. *Soient E un isocristal convergent sur $S^\sharp/W$, S^* l'ouvert de S sur lequel la log-structure de $S^\sharp$ est triviale et $j : S^* \hookrightarrow S$ l'immersion ouverte associée. On peut alors associer à E un isocristal sur S^* surconvergent le long de $S \setminus S^*$. De plus la construction est fonctorielle par rapport à E et par rapport à tout morphisme de log-schémas $S'^\sharp \to S^\sharp$.*

Démonstration. Supposons tout d'abord qu'il existe une immersion fermée exacte $i : S^\sharp \hookrightarrow Y^\sharp$, où $Y^\sharp/W$ est un log-schéma formel lisse. Soit $T_{S,n}(Y)$ l'élargissement p-adique universel du $(n-1)$-ième voisinage infinitésimal de S dans Y ([O1,2.5]). Munissons celui-ci de la log-structure image inverse de celle de $Y^\sharp$. Soient T_1 (resp. Y_1) la réduction modulo p de $T_{S,n}(Y)$ (resp. Y). Par définition les flèches canoniques $T_1 \to Y_1 \hookrightarrow Y$ et $T_1 \to S \hookrightarrow Y$ sont les mêmes. Comme de plus l'immersion i est exacte, on en déduit que $T_{S,n}(Y)$ définit un élément de $p - El(S^\sharp/W)$ noté $T_n^\sharp$. Pour n variables les $T_n^\sharp$ forment un système inductif de $p - El(S^\sharp/W)$. D'après [Be,2.3.4], la donnée des $E_n := E_{T_n^\sharp}$ compatibles aux morphismes de transition $T_n^\sharp \to T_{n+1}^\sharp$ est équivalente à la donnée de faisceaux $\mathcal{E}_n$ sur les tubes fermés $[S]_{Y,p^{1/n}}$ munis d'isomorphismes :

$$\mathcal{E}_{n+1}|_{[S]_{Y,p^{1/n}}} \simeq \mathcal{E}_n.$$

Finalement ces derniers se recollent en un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur le tube ouvert $]S[_Y$ et en appliquant le foncteur $j^\dagger$ à $\mathcal{E}$, on obtient finalement un $j^\dagger\mathcal{O}_{]S[_Y}$-module cohérent $E_Y^\dagger$.

la construction précédente est fonctorielle par rapport à l'immersion fermée exacte $S^\sharp \hookrightarrow Y^\sharp$, i.e. étant donné un carré commutatif entre immersions fermées exactes :

$$\begin{array}{ccc} S'^\sharp & \hookrightarrow & Y'^\sharp \\ u\downarrow & & \downarrow v \\ S^\sharp & \hookrightarrow & Y^\sharp \end{array}$$

et un isocristal convergent E sur $S^\sharp/W$, on a :

$$v_K^* E_Y^\dagger \simeq (u^*E)_{Y'}^\dagger.$$

Ceci résulte du fait que le carré commutatif ci-dessus induit un système inductif de flèches :

$$T_{S',n}(Y')^\sharp \to T_{S,n}(Y)^\sharp,$$

induisant à leur tour un système projectif d'isomorphismes :

$$v^* E_{T_{S,n}(Y)^\sharp} \simeq (u^*E)_{T_{S',n}(Y')^\sharp}.$$

Le reste de la démonstration est analogue à [LS-T]. Il consiste à vérifier :
1) Si on a une immersion fermée $i : S^\sharp \hookrightarrow Y^\sharp$ se factorisant en une immersion fermée exacte $i' : S^\sharp \hookrightarrow Y'^\sharp$ suivie d'un morphisme log-étale $u : Y'^\sharp \to Y^\sharp$, le $j^\dagger \mathcal{O}_{]S[_{Y'}}$-module cohérent associé est indépendant de la factorisation ([LS-T,2.3]).
2) la construction précédente est fonctorielle par rapport à l'immersion i ([LS-T,2.4]).
3) La construction 1), toujours possible locale-étalement, se recolle et permet d'associer à E un isocristal sur S^* surconvergent le long de $S \setminus S^*$ de manière fonctorielle par rapport à E et par rapport à tout morphisme de log-schéma $S'^\sharp \to S^\sharp$ ([LS-T,2.5]). $\square$

Remarque 3.4.
(i) On peut également associer à tout F-cristal non-dégénéré sur $S^\sharp/W$, un F-isocristal convergent ([O3,2.5]). De plus, le foncteur composé :

$$\begin{aligned}(F - cristal\ non - dégénéré\ sur\ S^\sharp/W) &\to F - Isoc(S^\sharp/W)\\ &\to F - Isoc^\dagger(S^* \hookrightarrow S/K),\end{aligned}$$

est le même que celui de [LS-T, 2] resteint aux F-cristaux non-dégénérés. En effet, si dans [LS-T], on se restreint à un F-cristal non-dégénéré E, on peut associer à celui-ci dans [LS-T,2.1] un faisceau sur le tube]S[et non simplement un faisceau sur un voisinage strict. Comme dans le cas non-logarithmique, il est alors clair que le foncteur à la Ogus et celui à la Berthelot coïncident.
(ii) La construction de la proposition précédente est en particulier fonctorielle pour le morphisme de log-schéma : $S^* \hookrightarrow S^\sharp$, où S^* est muni de la log-structure triviale. On en déduit que le foncteur restriction :

$$Isoc(S^\sharp/W) \to Isoc(S^*/W)$$

est identique au foncteur composé :

$$Isoc(S^\sharp/W) \to Isoc^\dagger(S^* \hookrightarrow S/K) \to Isoc(S^*/W).$$

Nous reprenons les hypothèses et notations de 3.1. Pour tout élargissement p-adique $(T^\sharp, s_T)$, on note $X_T^\sharp := X^\sharp \times_{S^\sharp} S_T^\sharp$ et f_T, le morphisme de topos :

$$(X_T^\sharp/T^\sharp)_{Cris} \to T_{Zar}.$$

Faltings a montré le résultat suivant dont nous rappelons la démonstration :

PROPOSITION 3.5 ([F,1,(f)]). *Les $\mathcal{O}_T \otimes K$-modules cohérents $R^1 f_{T*}\mathcal{O}_{X_T^\sharp/T^\sharp} \otimes K$ induisent pour $(T^\sharp, s_T)$ élargissement p-adique variable, un isocristal p-adiquement convergent sur $S^\sharp/W$. De plus ce dernier se prolonge en un F-isocristal convergent* que nous noterons $\mathbf{D}(X^\sharp)_K$.

DÉMONSTRATION. L'assertion étant de nature locale, on peut supposer que S se relève en un schéma formel lisse $\mathcal{S}$ et les points x_i se relèvent en un diviseur à croisements normaux $\mathcal{D}$ de $\mathcal{S}$. On peut également supposer que le frobenius de $S^\sharp$ se relève en un morphisme $F : \mathcal{S}^\sharp \to \mathcal{S}^\sharp$ qui est alors plat. D'après [F,1,(b)], l'immersion diagonale

$$\mathcal{S}^\sharp \hookrightarrow \mathcal{S}^\sharp \times_W \mathcal{S}^\sharp$$

se factorise en

$$\mathcal{S}^\sharp \hookrightarrow \mathcal{S}(1)^\sharp \to \mathcal{S}^\sharp \times_W \mathcal{S}^\sharp,$$

telle que le morphisme de gauche soit une immersion fermée exacte. Alors $\mathcal{S}^\sharp$ est un élargissement p-adique universel de $S^\sharp$ dans $\mathcal{S}^\sharp$. On note d'autre part $T(1)^\sharp$ l'élargissement p-adique universel exact de $S^\sharp$ dans $\mathcal{S}(1)^\sharp$, i.e. l'élargissement p-adique universel de S dans $\mathcal{S}(1)$ muni de la log-structure image inverse de celle de $\mathcal{S}(1)^\sharp$. Les projections :

$$\mathcal{S}(1) \to \mathcal{S},$$

étant plates, on déduit de manière analogue à [O3, 3.16] que les projections sur les élargissements p-adiques :

$$p_i : T(1) \to \mathcal{S}$$

le sont également. Ceci permet de montrer en utilisant le théorème de changement de base log-cristallin ([K,6.10]), qu'on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_{T(1)}$-modules cohérents :

$$\epsilon : p_2^* R^1 f_{\mathcal{S}*}\mathcal{O}_{X^\sharp/\mathcal{S}^\sharp} \simeq p_1^* R^1 f_{\mathcal{S}*}\mathcal{O}_{X^\sharp/\mathcal{S}^\sharp}.$$

On vérifie que celui-ci vérifie la condition cocycle habituelle sur $T(2)$. Notons $E_{\mathcal{S}} := R^1 f_{\mathcal{S}*}\mathcal{O}_{X^\sharp/\mathcal{S}^\sharp} \otimes K$. Alors, on montre de manière analogue à [O1,2.11] que $(E_{\mathcal{S}}, \epsilon)$ définit un isocristal p-adiquement convergent sur $(S^\sharp/W)$. Nous allons munir ce dernier d'une structure de F-isocristal p-adiquement convergent. Considérons le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} X'^\sharp & \to & X^\sharp \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S^\sharp & \xrightarrow{F} & S^\sharp \end{array}$$

D'après [H-K,2.24], le frobenius relatif de $S^\sharp$ induit un isomorphisme :

$$F^*_{X/\mathcal{S}} : K \otimes R^1 f'_{\mathcal{S}*}\mathcal{O}_{X'^\sharp/\mathcal{S}^\sharp} \simeq K \otimes R^1 f_{\mathcal{S}*}\mathcal{O}_{X^\sharp/\mathcal{S}^\sharp}.$$

Or le morphisme F sur $\mathcal{S}^\sharp$ étant plat, on déduit du théorème de changement de base :

$$F^* R^1 f_{\mathcal{S}*}\mathcal{O}_{X^\sharp/\mathcal{S}^\sharp} \simeq R^1 f'_{\mathcal{S}*}\mathcal{O}_{X'^\sharp/\mathcal{S}^\sharp}.$$

On obtient ainsi par composition un isomorphisme de Frobenius :

$$\Phi : F^* E_{\mathcal{S}} \simeq E_{\mathcal{S}}.$$

On vérifie que ce dernier est compatible à la stratification ϵ. On déduit alors de [F,1,(f)] que $E_{\mathcal{S}}$ est libre et donc en particulier plat et le reste de la démonstration est analogue à [O1,3.1]. □

Nous pouvons à présent appliquer ces résultats à la fonction L de Hasse-Weil d'une variété abélienne A_F/F à reduction log-lisse. Nous conservons les notations du (3.1).

THÉORÈME 3.6. *Soit A_F/F une variété possédant un modèle propre et log-lisse $X^\sharp$ sur $S^\sharp$. Soit A/U le schéma abélien induit sur l'ouvert U de S où la log-structure est triviale.*

Alors le F-isocristal convergent $\mathbf{D}(A)_K$ sur U se prolonge en un F-isocristal surconvergent $\mathbf{D}(A)^\dagger$ et la fonction L de Hasse-Weil de A_F/F a l'expression (1.4.1).

DÉMONSTRATION. Le F-log-isocristal convergent $\mathbf{D}(X^\sharp)_K$ sur $S^\sharp/W(\mathbf{F}_q)$ construit dans la proposition 3.5 induit grâce à la proposition 3.3 un F-isocristal surconvergent sur U, noté $\mathbf{D}(A)^\dagger$. D'après la remarque 3.4,(ii) ce $F-$isocristal surconvergent prolonge bien le $F-$isocristal convergent $\mathbf{D}(A)_K$ et l'assertion se déduit alors de manière analogue au corollaire 1.4. □

REMARQUE 3.7.
(i) Nous avons démontré la surconvergence du F-isocristal $\mathbf{D}(A)_K$ dans le cas où A_F a réduction semi-abélienne ou semi-stable. Il est conjecturé que ce soit toujours le cas et [E2] a démontré ce résultat dans le cas où le schéma abélien est muni d'une polarisation de degré premier à p.
(ii) D'après la remarque 3.4, (ii) on a pour tout point fermé x de U un isomorphisme entre la fibre en x de $\mathbf{D}(A)_K$ et celle de $\mathbf{D}(X^\sharp)_K$. Le résultat de Faltings [F,2.2] implique donc que

$$L(U, \mathbf{D}(A), t) = \prod_{i=0}^{2} det_K(1 - t\phi^i, H^i_{conv,c}(S^\sharp/K, \mathbf{D}(X^\sharp)_K)^{(-1)^{i+1}}.$$

Nous nous interessons à présent aux places où la variété a mauvaise réduction. Nous ne pouvons obtenir hélas qu'un résultat dans le cas des courbes elliptiques.

LEMME 3.8. *Soit A/F une variété abélienne possédant un modèle propre et semi-stable X/S. Alors, en tout point fermé x de S,*

$$H^1_{et}(A_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_l)^{I_x} \simeq H^1_{et}(X_{\bar{x}}, \mathbf{Q}_l).$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème local des cycles invariants ([D,3.6]), la flèche de spécialisation induit une flèche surjective :

$$H^*_{et}(X_{\bar{x}}, \mathbf{Q}_l) \to H^*_{et}(A_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_l)^{I_x}.$$

Il reste à montrer que cette flèche est injective pour $i = 1$, i.e que la flèche :

$$\pi_1(A_{\bar{F}}) \to \pi_1(X_{\bar{x}})$$

est surjective, ce qui résulte de [SGA1,X,2.4]. $\square$

Ce résultat ne sera pas utilisé par la suite.

Proposition 3.9. *Soit A_F/F une courbe elliptique possédant un modèle projectif et semi-stable X/S. Alors en tout point x de mauvaise réduction, on a :*

$$\begin{aligned} &det(1 - t^{deg(x)}\varphi^{-deg(x)}, H^1_{et}(A_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_l)^{I_x}) \\ &\quad = det(1 - t^{deg(x)}F_x, H^1_{cris}(X^\sharp_x/W(k(x))^\sharp)^{N=0}), \end{aligned}$$

où $W(k(x))$ est muni de la log-structure induite par celle sur $k(x)$ envoyant 1 *sur* 0 *et N est l'opérateur de monodromie* ([H-K]).

Démonstration. D'après [Mo, 6.3.3], en tout point x de mauvaise réduction, on a :

$$\begin{aligned} &\prod_{i=0}^{2} det(1 - t^{deg(x)}\varphi^{-deg(x)}, H^i_{et}(A_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_l)^{I_x})^{(-1)^{i+1}} \\ &\quad = \prod_{i=0}^{2} det(1 - t^{deg(x)}F_x, H^i_{cris}(X^\sharp_x/W(k(x))^\sharp)^{N=0})^{(-1)^{i+1}}. \end{aligned}$$

Or on peut identifier

$$det(1 - t^{deg(x)}\varphi^{-deg(x)}, H^0_{et}(X_{\bar{x}}, \mathbf{Q}_l)^{I_x})$$

et

$$det(1 - t^{deg(x)}F_x, H^0_{cris}(X^\sharp_x/W(k(x))^\sharp)^{N=0}),$$

où l'inertie agit trivialement et la monodromie est la flèche nulle. Par dualité de Poincaré (dans le cas log-cristallin cf [Ts]), on peut donc également identifier les termes en H^2 et donc finalement les termes en H^1. $\square$

COROLLAIRE 3.10. *Sous les hypothèses de 3.9, on a*

$$(i) \quad L_{A_F}(s) = \prod_{i=1}^{r} det(1 - q^{-sdeg(x_i)} F_{x_i}, H^1_{cris}(X^\sharp_{x_i}/W(k(x_i))^\sharp)^{N=0})^{-1}$$
$$\times \prod_{i=0}^{2} det_K(1 - q^{-s}\phi^i, H^i_{rig,c}(U, \mathbf{D}(A)^\dagger))^{(-1)^{i+1}}.$$
$$(ii) \quad L_{A_F}(s) = \prod_{x \in |S|} det(1 - q^{-sdeg(x)} \Phi_x, H^1_{rig}(X_x/K(x)))^{-1},$$

où Φ_x est l'automorphisme de Frobenius induit par le frobenius de X_x.

DÉMONSTRATION. L'assertion (i) résulte immédiatement des propositions 3.9 et 3.6. En les points de mauvaise réduction, on a d'après [Ch,4.11] :

$$H^1_{cris}(X^\sharp_x/W(k(x))^\sharp)^{N=0} \otimes K(x) \simeq H^1_{rig}(X_x/K(x)).$$

D'autre part, on a vu (cf 1.4) que la partie de la fonction L de A_F en les points de bonne réduction est la même que la fonction L associée à $\mathbf{D}(A)^\dagger$. Celle-ci est par définition ([E-LS,6.6]) :

$$L(U, \mathbf{D}(A)^\dagger, t) := \prod_{x \in |U|} det(1 - t^{deg(x)} \Phi_x, H^0_{rig}(k(x)/K(x), x^*\mathbf{D}(A)^\dagger))^{(-1)}.$$

Or on a également :

$$\begin{aligned} H^0_{rig}(k(x)/K(x), x^*\mathbf{D}(A)^\dagger) &= H^0_{conv}(k(x)/K(x), x^*\mathbf{D}(A)_K) \\ &= H^1_{rig}(A_x/K(x)), \end{aligned}$$

d'après [O1,3.7.1]. Ainsi, l'assertion (ii) en découle aussitôt. □

REMARQUE 3.11.
(i) L'argument de la proposition 3.9 n'est plus valable en dimension supérieure. Ceci même en admettant la conjecture monodromie-poids de [Mo,3.27] car il demeure dans ce cas difficile de comparer les termes en H^1 l-adique et log-cristallin.
(ii) Le lemme 3.8 et l'assertion 3.10 (ii) nous amène à poser la question suivante : existe-t-il un analogue à [K-M] permettant de comparer les polynômes caractéristiques de l'action de frobenius sur la cohomologie l-adique et rigide dans le cas semi-stable?

4. Réduction Potentiellement Semi-abélienne

Dans cette dernière partie, nous nous intéressons au cas de la réduction potentiellement semi-abélienne (des résultats analogues pouvant d'ailleurs être obtenus dans le cas de réduction potentiellement semi-stable, via le chapitre 3). On se référera à [Ku] pour une étude de ces différentes hypothèses. Celui-ci a en particulier démontré que l'hypothèse de réduction semi-abélienne implique (seulement!) celle de réduction potentiellement semi-stable.

LEMME 4.1. *Soient X/k un schéma affine et lisse sur un corps parfait k de caractéristique p, $\pi : X' \to X$ un morphisme surjectif étale et E un F-isocristal convergent sur X. Si π^*E se prolonge en un F-isocristal surconvergent $E'^{\dagger}$, alors E se prolonge également à un F-isocristal surconvergent.*

DÉMONSTRATION. L'assertion est due à [E2,lemme4]. $\square$

PROPOSITION 4.2. *Soient U/k un schéma affine lisse sur un corps k parfait de caractéristique p et E un F-isocristal convergent sur $U/W(k)$. Soit un morphisme fini et étale $\pi : U' \to U$ tel que U' soit l'ouvert d'un log-schéma propre et lisse $S'^{\sharp}/k$, sur lequel la log-structure de $S'^{\sharp}$ devient triviale et tel que π^*E se prolonge en un F-log-isocristal convergent sur $S'^{\sharp}/W(k)$.*

Alors E se prolonge en un F-isocristal surconvergent sur U.

DÉMONSTRATION. Comme π^*E se prolonge en un F-log-isocristal convergent sur $S'^{\sharp}/W(k)$ alors celui-ci est en fait surconvergent sur U' d'après la proposition 3.3 et la remarque 3.4, (ii). On déduit finalement du lemme 4.1 qu'il en est de même pour E. $\square$

Exemples 4.3.
(i) Soit G/S un groupe p-divisible étale à monodromie locale finie sur une courbe affine et lisse S/k sur un corps algébriquement clos de caractéristique p. Alors le F-cristal unité associé $\mathbf{D}(G)$ provient d'un isocristal surconvergent $E^{\dagger}$ sur S d'après [Cr1]. En fait $\mathbf{D}(G)$ s'étend après une possible extension finie étale en un cristal (et donc à fortiori en un log-isocristal)

sur la compactification (cf [Ts2]). On déduit de [E-LS] que la fonction L de $\mathbf{D}(G)$ est égale à :

$$L(S, \mathbf{D}(G), t) = \prod_{i=0}^{2} det(1 - t\phi^i, H^i_{rig,c}(S, E^\dagger))^{(-1)^{i+1}}.$$

De plus cette dernière est en fait rationelle puisque les groupes de cohomologie sont de dimension finie d'après [Ts1].
(ii) Soit A/U un schéma abélien sur une courbe affine et lisse U/k sur un corps parfait de caractéristique p. On suppose qu'il existe un recouvrement fini étale $\pi : U' \to U$ tel que $A_{U'}$ se relève en un schéma propre, log-lisse, de type Cartier $X'^\sharp/S'^\sharp$, où S' est une compactification lisse de U'.

Alors d'après (3.5) et (4.2), $\mathbf{D}(A)$ provient d'un isocristal surconvergent $E^\dagger$ sur U et sa fonction L est donc méromorphe d'après [E-LS].

(4.4) Nous reprenons les notations du (1.2), en supposant cette fois que A_F/F est à réduction potentiellement semi-abélienne, i.e il existe une extension finie (que l'on peut également supposer séparable (cf [SGA7,IX])) de corps de fonction algébrique en une variable L/K tel que A_L se relève sur S', la normalisation de S relativement à L, en un log-groupe p-divisible $G'^\sharp/S'^\sharp$. le morphisme associé sur les courbes $\pi : S' \to S$ est fini ([M,1.1]). La flèche π est en fait génériquement étale, i.e. il existe un ouvert affine dense U de S tel que $\pi^{-1}(U) \to U$ soit étale. En effet, soit $U' := S' \setminus support(\Omega^1_{S'/S})$. On a une flèche étale de $f : U' \to S$ ([M,3.21]) et ainsi $U := f(U')$ est un ouvert de S qui est contenu dans l'ensemble des places où A_F a bonne réduction ou de manière équivalente $Z := S \setminus U$ est un nombre fini de points de S contenant les points où A_F a mauvaise réduction. On en déduit une flèche finie étale :

$$U" := \pi^{-1}(U) \to U.$$

Soient Z', l'ensemble des points où A_L a mauvaise réduction et $Z" := S' \setminus U"$. On note $A"$ le schéma abélien sur $U"$ prolongeant A_L et A/U, celui prolongeant A_F. Les diviseurs Z' et $Z"$ induisent respectivement sur S' une log-structure L' et $L"$ et un morphisme de log-schémas $(S', L") \to (S', L') = S'^\sharp$. Le F-log-cristal non-dégénéré sur $S'^\sharp$ associé à $G'^\sharp/S'^\sharp$ donne alors par restriction un F-log-cristal non-dégénéré sur $(S', L")$ qui prolonge le cristal de Dieudonné de A". D'après 4.2, le cristal de Dieudonné associé à A est donc surconvergent. On le note $\mathbf{D}(A)^\dagger$. Nous avons ainsi démontré que $\mathbf{D}(A)^\dagger$ s'étend après un changement de base propre surjectif et génériquement étale en un log-cristal. Ce dernier est donc quasi-unipotent au sens de [Cr4,7] d'après [Ts2,1.3.1].

Notons à présent $L_Z(A_F, t)$ la partie de la fonction L de Hasse-Weil définie en dehors des points de Z. Nous avons démontré

THÉOREME 4.5.

$$L_Z(A_F, t) = \prod_{i=0}^{2} det(1 - qt\theta^i, H^i_{rig}(U, \mathbf{D}(A)^{\dagger\vee}))^{(-1)^{i+1}}$$

Comme U est une courbe affine lisse, nous savons d'après [Cr4] que la cohomologie de l'isocristal quasi-unipotent $\mathbf{D}(A)^\dagger$ est de dimension finie. Nous nous proposons d'en donner une expression plus précise.

PROPOSITION 4.6. *Soient k un corps parfait de caractéristique p et un diagramme cartésien de k-schémas :*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ U' & \xrightarrow{\pi} & U \end{array}$$

tel que f est un morphisme fini de courbes lisses, U et U' des ouverts affines denses de X' et X et π un morphisme fini étale Galoisien de groupe G. Soit $E^\dagger$ un isocristal sur U surconvergent le long de $X \setminus U$. Alors

$$H^i_{rig}(U, E^\dagger) \simeq H^i_{rig}(U', \pi^* E^\dagger)^G$$

DÉMONSTRATION. Nous suivons dans un premier temps la démarche de [Cr3,1.3]. Le morphisme f est propre, plat et d'intersection locale complète puisque X est une courbe lisse. D'autre part, l'action de G se prolonge à X' telle qu'on ait $X'/G = X$. On peut alors trouver un relèvement formel lisse $\mathcal{X}/W(k)$ et un relèvement $\hat{f} : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ de f d'intersection locale complète. Soit $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'$), la restriction de $\mathcal{X}$ à U (resp. U'). Alors l'action de G se relève de manière unique à $\mathcal{U}'/\mathcal{U}$ et d'après [Cr1,3.2.2], il existe un voisinage strict V de $\mathcal{U}^{an}$ dans $\mathcal{X}^{an}$ tel que

$$V' := \pi^{-1}(V) \to V$$

soit un morphisme fini étale. De plus l'action de G se prolonge à V' tel qu'on ait $V'/G = V$. Quitte à restreindre V, on peut supposer que $E^\dagger = j^\dagger E_V$ (cf [Be]) où E_V est un $\mathcal{O}_V$-module cohérent. On a alors d'après [Cr3,1.3] :

$$(*) \qquad \pi_*(\pi^* E_V)^G = E_V.$$

Soient $\nabla - \mathcal{O}_V - mod$, la catégorie des $\mathcal{O}_V$-modules cohérents à connexion intégrable et $\nabla - \mathcal{O}_V[G] - mod$ celle des objets E de $\nabla - \mathcal{O}_V - mod$ munis d'une action de Galois tel que l'inclusion canonique $E^G \hookrightarrow E$ soit horizontale. On a un carré commutatif de foncteurs exact à gauche dans des catégories abéliennes

$$\begin{array}{ccc} \nabla - \mathcal{O}_V[G] - mod & \overset{\Gamma_{dR}}{\to} & K[G] - mod \\ \downarrow ()^G & & \downarrow ()^G \\ \nabla - \mathcal{O}_V - mod & \overset{\Gamma_{dR}}{\to} & K - ev \end{array}$$

On déduit alors de manière analogue à [E1,3.1.1] que :

$$(**) \qquad H^i_{dR}(V, \pi_*\pi^* E_V)^G \simeq H^i_{dR}(V, \pi_*(\pi^* E_V)^G).$$

Comme U est une courbe lisse, on sait d'après [C-LS,2.1.2] que la cohomologie rigide sur U se calcule comme une limite inductive des cohomologies de de Rham sur les voisinages stricts. La limite inductive commutant d'autre part au foncteur $()^G$, on déduit de (*) et en passant à la limite inductive dans (**) que

$$H^i_{rig}(U, \pi_*\pi^* E^\dagger)^G \simeq H^i_{rig}(U, E^\dagger).$$

Enfin comme π est fini étale, le morphisme π_* (défini dans [Cr2]) est exact si bien que dans l'isomorphisme ci-dessus, le terme de gauche n'est autre que $H^i_{rig}(U', \pi^* E^\dagger)^G$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Nous pouvons déduire de 1.5 et 4.6 le résultat suivant :

COROLLAIRE 4.7. *On se place sous les hypothèses de* 4.6. *Soit de plus* E *un* F*-cristal non-dégénéré localement libre de rang fini sur* U/W *tel que* π^*E *se prolonge en un* F*-log-cristal* E' *non-dégénéré localement libre de rang fini sur* $X'^{\sharp}/W$. *Alors le* F*-isocristal associé à* E *est surconvergent et même quasi-unipotent. On le note* $E^{\dagger}$. *De plus sa cohomologie est de dimension finie et possède l'expression suivante*:

$$H^i_{rig}(U, E^{\dagger}) \simeq (H^i_{cris}(X'^{\sharp}/W, E') \otimes K)^G.$$

References

[B-B-M] Berthelot, P., Breen, L. et W. Messing, Théorie de Dieudonné cristalline. II, Lecture Notes in Math., vol. 930, Springer-Verlag, New-york and Berlin, 1982.

[B-L-R] Bosch, S., Luetkebohmert, W. et M. Raynaud, Néron Models, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge-Band 21. A series of modern surveys in mathematics (1990).

[C-F] Chai, C.-L. et G. Faltings, Degeneration of Abelian Varieties, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge-Band 22. A series of modern surveys in mathematics (1990).

[C-LS] Chiarellotto, B. et B. Le Stum, F-isocristaux unipotent, Comp. Math. (1998).

[E-LS] Etesse, J.-Y. et B. Le Stum, Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents I: Interprétation cohomologique, Math. Ann. **296** (1993), 557–576.

[H-K] Hyodo, O. et K. Kato, Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles, in Period p-adiques, Astérisque **223** (1994), 221–268.

[K-M] Katz, N. et W. Messing, Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields, Invent. Math. **23** (1974), 73–77.

[LS-T] Le Stum, B. et F. Trihan, Log-cristaux et surconvergence, prépublication 99-51, Université de Rennes (1999).

[SGA1] Grothendieck, A., Revêtements étales et groupe fondamental, Sprin-ger Lect. Notes Math. **224** (1971).

[SGA7] Grothendieck, A., Raynaud, M. et D. S. Rim, Groupe de monodromie en Géométrie Algébrique, Lecture Notes in Mathematics **288** (1972).

[S-T] Serre, J.-P. et J. Tate, Good reduction of abelian varieties, Ann. of Math. **88** (1968).

[Ba] Bauer, W., On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer for abelian varieties over function fields in characteristic $p > 0$, Invent. Math. **108** (1992), 263–287.

[Be] Berthelot, P., Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres. Première partie, preprint, Université de Rennes (1996).

[Ch] Chiarellotto, B., Rigid cohomology and invariant cycles for a semi-stable log-scheme, Duke Math. J. **97** (1999), no-1, 155–169.

[Cr1] Crew, R., F-isocrystals and p-adic representations, in Algebraic Geometry-Bowdoin 1985, PSPM 46, part 2, p.111–138 (1987).

[Cr2] Crew, R., F-isocrystals and their monodromy groups, Ann. Sc. E. Norm. Sup. 4^e sér. **25** (1992), 429–464.

[Cr3] Crew, R., Kloosterman sums and monodromy of a p-adic hypergeometric equation, Comp. Math. **91** (1994), 1–36.

[Cr4] Crew, R., Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t.31, p.717 à 763 (1998).

[D] Deligne, P., Conjecture de Weil, II. Publ. Math. I.H.E.S. **52** (1980), 138–252.

[E1] Etesse, J.-Y., Rationalité et valeurs de fonctions L en cohomologie cristalline, Ann. Inst. Fourier **38** (n4) (1988), 39–92.

[E2] Etesse, J.-Y., Relèvement de schémas abéliens, F-isocristaux et fonctions L, J. reine angew. Math. **535** (2001), 51–63.

[E3] Etesse, J.-Y., Descente étale des F-isocristaux surconvergents et rationalité des fonctions L de schémas abéliens, prépublication 00-20, Université de Rennes (2000).

[F] Faltings, G., F-isocrystals on open varieties. Results and conjectures, In the Grothendieck Festschrift, volume III, p. 133–162, Birkhaeuser (1990).

[I] Illusie, L., Logarithmic Spaces (According to K. Kato), Barsotti Symposium in algebraic Geometry (1994).

[K] Kato, K., Logarithmic structures of Fontaine-Illusie, in Algebraic analysis, geometry and number theory, the Johns Hopkins Univ. Press (1989), 191–224.

[Ku] Kuennemann, K., Projective regular models for abelian varieties, semistable reduction and the height pairing, Duke Math. J. **95**, No1 (1998), 161–212.

[Mi] Milne, J. S., Etale cohomology, Princeton University Press (1980).

[Mo] Mokrane, A., La suite des poids en cohomologie de Hyodo-Kato, Duke Math. J. **72**, No.2 (1993), 301–337.

[O1] Ogus, A., F-isocrystal and de Rham cohomology II-Convergent isocrystals, Duke Math. J. **51**(4) (1984), 765–850.

[O2] Ogus, A., The convergent topos in characteristic p, In the Grothendieck Festschrift, volume III, p. 133–162, Birkhaeuser (1990).

[O3] Ogus, A., F-crystals on schemes with constant log-structure, Special issue in honour of Frans Oort. Compositio Math. **97** (1995), no. 1–2, 187–225.

[S] Schneider, P., Zur Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer ueber globalen Funktionen korpern, Math. Ann. **260** (1982), 495–510.

[Tr] Trihan, F., Fonction L-unité d'un groupe de Barsotti-Tate, manuscripta math. **96** (1998), 397–419.

[Ts] Tsuji, T., Poincaré duality for logarithmic crystalline cohomology, Compositio Math. **118** (1999), no.1, 11–41.

[Ts1] Tsuzuki, N., On the Gysin isomorphism of rigid cohomology, Hiroshima Math. J. **29** (1999), no3, 479–527.

[Ts2] Tsuzuki, N., Finite local monodromy of overconvergent unit root F-isocrystals on a curve, American Journal of Math. **120** (1998), 1165–1190.

(Received September 21, 2000)

Graduate School of Mathematical Science
University of Tokyo
3-8-1 Komaba, Meguro-ku
Tokyo 153-8914, Japan
E-mail: trihan@ms.u-tokyo.ac.jp