J. Math. Sci. Univ. Tokyo
4 (1997), 33–52.

Norme Minimale sur le Compléxifié d'un Espace de Hilbert Réel

By V. Avanissian

Abstract. Let $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ be a real Hilbert space and let $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ be the complexification of $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. The first part of this paper treats the problem of the existence of the minimal norm $\tilde{\ell}$ on $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ such that

$$\tilde{\ell}(z) \leq \|z\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \quad \text{for} \quad z \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$
$$\tilde{\ell}(x) = \|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}.$$

We prove the following theorem :

a) The minimal norme $\tilde{\ell}$ exists in $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

b) Let $D \subset \mathbb{C}^N$ be a bounded, convex, balanced domain. There exists a maximal bounded convex, balanced domain $\tilde{D} \subset \mathbb{C}^N$ such that

$$\tilde{D} \supset D, \qquad \tilde{D} \cap \mathbb{R}^N = D \cap \mathbb{R}^N.$$

c) Let $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^N$, then the minimal norm $\tilde{\ell}$ is the supporting function of the unit closed Lie ball in $\mathbb{C}^N$.

(a) and b) extend a result of K. T. Hahn and Peter Plug) where $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^N$ and D is the unit euclidean ball in $\mathcal{C}^N$. The second part of the paper gives a geometrical interpretation of the minimal norm $\tilde{\ell}$ in $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$.

If $\mathcal{N}$ is a norm in $\mathbb{C}^N$, log $\mathcal{N}(z)$ is plurisubharmonic function. The final part of the paper studies the plurisubharmonic functions V in $\mathbb{C}^N$ such that $\forall k \in \mathbb{C}$, $V(kz) = |k|V(z)$, $V(z) \leq \|z\|$ for $z \in \mathbb{C}^N$, $V(x) = \|x\|$ for $x \in \mathbb{R}^N$, $\|z\|$ is euclidean norm in $\mathbb{C}^N$.

Préliminaires. On considère ici la classe $(S)_{\mathbb{C}^N}$ des fonction V

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46C05, 31C10; Secondary 46A55, 52A40.

plurisousharmoniques dans $\mathbb{C}^N$ (en abrégé p.s.h.) assujettie aux conditions suivantes :

a) Pour tout $k \in \mathbb{C}$, $V(kz) = |k|V(z)(z \in \mathbb{C}^N)$

b) Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}^N, (x, y \in \mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} V(z) &\leq \|z\| \\ V(x) &= \|x\| \end{aligned}$$

où $\|z\| = (|z_1|^2 + \cdots + |z_N|^2)^{1/2}$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{C}^N$. Dans le cas $N = 1$, la classe $(S)_{\mathbb{C}^N}$ est réduite à $V = |z|$ à cause de l'homogénéité de V et la 2e condition de b).

Un énoncé de P. Lelong (P.L. [1]) implique que les fonctions V p.s.h dans $\mathbb{C}^N$ vérifiant a) sont à valeurs positives, $\log V$ est p.s.h. et (d'après la terminologie (P.L. [2]), ce sont des quasi-normes). L'ensemble $D_V = \{z \in \mathbb{C}^N \mid V(z) < 1\}$ est un domaine pseudo-convexe disqué (i.e. $z \in D_V$ implique $\alpha z \in D_V$, si $|\alpha| \leq 1$). Réciproquement, si D est un voisinage ouvert de 0, disqué, pseudo-convexe, sa jauge J_D est une quasi-norme. Ainsi, la donnée d'un domaine D de $\mathbb{C}^N$, pseudo-convexe, disqué, contenant la boule $B_C(0,1) = \{z \in \mathbb{C}^N \| \|z\| < 1\}$ et tel que $D \cap \mathbb{R}^N = B_{\mathbb{R}}(0,1) = B_C(0,1) \cap \mathbb{R}^N$ caractérise un élément de $(S)_{\mathbb{C}^N}$. La jauge J_D est une norme dans $\mathbb{C}^N$ si D est convexe, disqué, borné. Remarquons que la condition a) implique la majoration

$$V(z) \leq M\|z\| \quad (M = \sup_{\|z\|=1} V(z))$$

mais la condition b) exige une majoration uniforme pour toute $V \in (S)_{\mathbb{C}^N}$. La classe $(S)_{\mathbb{C}^N}$ contient en particulier les fonctions

$$\begin{aligned} &|Q(z)|^{1/2} \quad \text{où} \quad Q(z) = z_1^2 + \cdots + z_N^2 \\ &h(z) = [\|z\|^2 |Q(z)|]^{1/4} \end{aligned}$$

qui ne sont pas des normes (h est p.s.h. car $\log h$ l'est). Notons $(\mathcal{N}S)_{\mathbb{C}^N}$ la sous-classe de $(S)_{\mathbb{C}^N}$ constituée par les normes $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{C}^N$. Elle contient en particulier les normes :

$$z \mapsto \|z\|, \; z \mapsto \ell_N(z) = \max_{\substack{\|a\|=1 \\ a \in \mathbb{R}^N}} |a_1 z_1 + \cdots + a_N z_N|.$$

Remarquons que la norme de Lie

$$z \mapsto L(z) = [\|z\|^2 + \sqrt{\|z\|^4 - |Q(z)|^2}]^{1/2}$$

vérifie $L(x) = \|x\|$ sur $\mathbb{R}^N$, mais $L(z) \geq \|z\|$. Elle est la plus grande norme sur $\mathbb{C}^N$ qui majore la norme euclidienne de $\mathbb{C}^N$ et qui coïncide avec celle-ci sur $\mathbb{R}^N$ (cf. [A]). Par contre, la norme

$$\ell_N(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\|z\|^2 + |Q(z)|]^{1/2}$$

est la plus petite norme sur $\mathbb{C}^N$, appartenant à $(\mathcal{N}S)_{\mathbb{C}^N}$ d'après un résultat de K.T. Hahn-Peter Plug ([M-P]). On montrera (Théorème 1,c) que la norme minimale ℓ_N est la fonction d'appui de l'adhérence de la boule unité de Lie.

Problème (A). Parmi les domaines pseudo-convexes, disques D de $\mathbb{C}^N$, vérifiant

$$D \supset B_{\mathbb{C}}(0,1)\ ,\ D \cap \mathbb{R}^N = B_{\mathbb{R}}(0,1)$$

y a-t-il un domaine maximal ? Si oui quelle est l'expression de la fonction V p.s.h. qui le caractérise ?

Problème (B). Soit (D_0) un domaine convexe borné, disqué de $\mathbb{C}^N$. Parmi les ouverts convexes bornés disqués D de $\mathbb{C}^N$ vérifiant

$$D \supset D_0\ ,\ D \cap \mathbb{R}^N = D_0 \cap \mathbb{R}^N$$

y a-t-il un élément maximal $\tilde{D}_0$? Si oui quelle est la norme qui le caractérise ?

Dans le cas $D_0 = B_{\mathbb{C}}(0,1)$, la norme ℓ_N fournit une réponse positive au problème B. Dans le cas général (corollaire) le domaine $\tilde{D}_0$ maximal est :

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C}^N \mid \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} J_{D_0}(x \sin\theta + y\cos\theta) < 1\}.$$

Par exemple, dans le cas d'ellipsoïde E :

$$D_0 = E = \{z \in \mathbb{C}^N \mid \frac{|z_1|^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{|z_N|^2}{a_N^2} < 1\}$$

où les a_j sont réels non nuls. On a

$$\tilde{D}_0 = \{z \in \mathbb{C}^N | \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[\sum_{j=1}^{N} \frac{|z_j|^2}{a_j^2} + | \sum_{j=1}^{N} \frac{z_j^2}{a_j^2} | \Big]^{1/2} < 1\}.$$

Pour $a_1 = \cdots = a_N = 1$, on retrouve la boule unité correspondant à la norme minimale ℓ_N.

Le problème (B) équivaut à l'existence d'une norme minimale dans la classe $(\mathcal{N})_{\mathbb{C}^N}$ des normes $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{C}^N$ vérifiant les conditions

$$\mathcal{N}(z) \leq \mathcal{N}_0(z) \quad \text{si } z \in \mathbb{C}^N \tag{1}$$

$$\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}_0(x) \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^N \tag{2}$$

où $\mathcal{N}_0$ est une norme donnée dans $\mathbb{C}^N$. Le rejet de la condition (1) implique la non existence d'une norme minimale. Par exemple considérons dans $\mathbb{C}^N$ les normes $\mathcal{N}_0(z) = \|z\|$, et

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^* : z \mapsto & (|z_1 + iz_2|^2 + |z_3|^2 + \cdots + |z_N|^2)^{1/2}\varepsilon \\ & + (|z_1 - iz_2|^2 + |z_3|^2 + \cdots + z_N|^2)^{1/2}(1-\varepsilon) \end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$. Aux points $\zeta = (1, i, 0, \ldots, 0)$; $\zeta' = \bar{\zeta} = (1, -i, 0, \ldots, 0)$.

On a :

$$\mathcal{N}^*(\zeta) = 2(1-\varepsilon) \ , \ \mathcal{N}^*(\bar{\zeta}) = 2\varepsilon.$$

Supposons qu'il existe une norme minimale $\mathcal{N}_m$ dans la classe des normes sur $\mathbb{C}^N$ vérifiant seulement (2) on aura

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}^*(x) = \mathcal{N}_m(x) = \|x\| \\ & \mathcal{N}_m(\bar{\zeta}) > 0 \end{aligned}$$

et $\mathcal{N}^*(\bar{\zeta}) < \mathcal{N}_m(\bar{\zeta})$ pour ε suffisamment petit. Donc, $\mathcal{N}_m$ ne sera pas minimale.

Dans ce travail on envisage entre autre un problème analogue à (B) dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ complexifié d'un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$.

On montre l'existence d'une norme minimale $\tilde{\ell}_{\mathcal{H}_\mathbb{C}}$ dans la classe $(\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_\mathbb{C}}$ des normes $\mathcal{N}$ sur $\tilde{\mathcal{H}}_\mathbb{C}$ vérifiant

$$b') \qquad \begin{aligned} \tilde{\mathcal{N}}(z) &\leq \|z\|_{\mathcal{H}_\mathbb{C}} \text{ , si } z \in \mathcal{H}_\mathbb{C} \\ \tilde{\mathcal{N}}(x) &= \|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} \text{ , si } x \in \mathcal{H}_\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Grâce à une transformation T utilisée dans l'étude des cellules d'harmonicité on donne une interprétation géométrique simple de $\tilde{\ell}_{\mathcal{H}_\mathbb{C}}$ et les normes de la classe $(\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_\mathbb{C}}$. On étudie ensuite dans $\mathbb{C}^N$, les moyennes $\lambda(\log V, 0, R)$, $A(\log V, 0, R)$ des fonctions $V \in (S)_{\mathbb{C}^N}$ sur les sphères $\partial B_\mathbb{C}(0, R)$. Les graphes de ces moyennes par rapport à un repère orthornormé $(t = \log R, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ sont des droites parallèles à la 1ère bissectrice et sont situées dans une zone U de même direction, limitée par les droites

$$y = \log R \ , \ y = \log R - (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2N-2}) - \frac{1}{2N}.$$

Le nombre $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2N-2} + \frac{1}{2N})$ peut être amélioré (il est lié au problème A). Par contre, la région concernant les normes $(\mathcal{N}S)_{\mathbb{C}^N}$ est rigoureusement limitée par la droite $y = t - \lambda(\log \ell_N, 0, 1)$.

L'étude du problème (A) sera publiée ultérieurement.

2. Soient $(\mathcal{H}_\mathbb{R}, \langle ., . \rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}})$ un espace de Hilbert réel $x \mapsto \|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} = \langle x, x \rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^{1/2}$ la norme sur $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ induite par le produit scalaire de $\mathcal{H}_\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{H}_\mathbb{C} = \mathcal{H}_\mathbb{R} \bigoplus i\mathcal{H}_\mathbb{R}$ (somme directe). Si $a + ib \in \mathbb{C}$ et $(x, y) \in \mathcal{H}_\mathbb{C}$, on définit le produit $(a + ib)(x, y) = (ax - by, bx + ay)$. L'espace $\mathcal{H}_\mathbb{C}$ est alors un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On écrit $(x, y) = x + iy = z$, $(x, 0) = x$, et on confond $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ avec $\{z = x + iy \in \mathcal{H}_\mathbb{C} | y = 0\}$. Le produit scalaire

$$\langle x + iy, x' + iy' \rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{C}} = \langle x, x' \rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} + \langle y, y' \rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} + i\langle y, x' \rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} - i\langle x, y' \rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}$$

munit $\mathcal{H}_\mathbb{C}$ d'une structure d'espace de Hilbert qui est le complexifié de $\mathcal{H}_\mathbb{R}$. Si $z = x + iy \in \mathcal{H}_\mathbb{C}$, on pose

$$\|z\|_{\mathcal{H}_\mathbb{C}} = (\|x\|^2_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} + \|y\|^2_{\mathcal{H}_\mathbb{R}})^{1/2.}$$

THÉORÈME 1. *Soient* $(\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_\mathbb{C}}$ *l'ensemble des normes* $\tilde{\mathcal{N}}$ *sur l'espace de Hilbert* $(\mathcal{H}_\mathbb{C}, \langle .,. \rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{C}})$ *complexifié de l'espace de Hilbert réel* $(\mathcal{H}_\mathbb{R}, \langle .,. \rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}})$, *telles que*

$$(a') \qquad \tilde{\mathcal{N}}(z) \leq \|z\|_{\mathcal{H}_\mathbb{C}}\,,\ si\ z \in \mathcal{H}_\mathbb{C}$$
$$(b') \qquad \tilde{\mathcal{N}}(x) = \|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}\,,\ si\ z = x \in \mathcal{H}_\mathbb{R}.$$

a) L'application

$$\tilde{\ell} : \mathcal{H}_\mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$$
$$z \mapsto \tilde{\ell}(z) = \inf_{\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_\mathbb{C}}} \{\tilde{\mathcal{N}}(z)\}$$

est une norme de la classe $(\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_\mathbb{C}}$.

b) Pour tout $z = x + iy \in \mathcal{H}_\mathbb{C}$ *fixé,* $\tilde{\ell}(z)$ *est égale à la norme de l'application linéaire continue*

$$f_z : \mathcal{H}_\mathbb{R} \to \mathbb{C}\,,\ a \mapsto f_z(a)$$

avec

$$f_z(a) = \langle z, a \rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{C}} = \langle x, a \rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} + i \langle y, a \rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}.$$

On a

$$(1) \qquad \tilde{\ell}(z) = \Big(\frac{1}{2}[\|x\|^2_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} + \|y\|^2_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} + \sqrt{(\|x\|^2_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} - \|y\|^2_{\mathcal{H}_\mathbb{R}})^2 + 4\langle x, y \rangle^2_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}}]\Big)^{1/2} = \|f_z\|.$$

c) Dans le cas $\mathcal{H}_\mathbb{C} = \mathbb{C}^N$, *la norme minimale* $\tilde{\ell}_N$ *est égale à la fonction d'appui de la boule unité fermée de Lie.*

Démonstration.

a) Le début de la démonstration est analogue au cas où $\mathcal{H}_\mathbb{C} = \mathbb{C}^N$ (cf. [H.T]). Soient $\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_\mathbb{C}}$, $z = x + iy \in \mathcal{H}_\mathbb{C}$ fixé. On supposera sans restreindre la généralité que les vecteurs x et y sont linéairement indépendants (sur $\mathbb{R}$). L'application

$$\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$
$$(\zeta, \eta) \mapsto \rho(\zeta, \eta) = \tilde{\mathcal{N}}\Big(\zeta \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}} + i\eta \frac{y}{\|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}}\Big)$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\rho(\pm 1, 0) = \rho(\pm \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}}) = 1$$
$$\rho(0, \pm 1) = \rho(\pm \frac{iy}{\|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}}) = 1.$$

Le disque $D_2 = \{(\zeta, \eta) \subset \mathbb{R}^2 \mid \rho(\zeta, \eta) \leq 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$ est convexe et son bord contient les points $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$. Par conséquent D_2 est inclus dans le disque convexe

$$D = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|\zeta|, |\eta|) \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Donc

$$\rho(\zeta, \eta) \geq \max(|\zeta|, |\eta|) \tag{2}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{N}}(x+iy) &= \tilde{\mathcal{N}}(\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}} + i\|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} \frac{y}{\|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}}) \\ &= \rho(\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}, \|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}) \geq \max(\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}, \|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}).\end{aligned}$$

(cette inégalité est encore valable si x et y sont dépendants).

Or, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{\mathcal{N}}(x+iy) = \tilde{\mathcal{N}}(e^{i\theta}(x+iy)) \geq \max[\|x\cos\theta - y\sin\theta\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}, \|x\sin\theta + y\cos\theta\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}].$$

D'où

$$\mathcal{N}(x+iy) \geq \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \|x\sin\theta + y\cos\theta\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} = \tilde{\ell}(z). \tag{3}$$

L'application $z \mapsto \tilde{\ell}(z)$ de $\mathcal{H}_\mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ est une norme vérifiant a') et b'), donc, elle est un élément de $(\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_\mathbb{C}}$ et d'après (3), $\tilde{\ell}(z)$ minore tous les $\tilde{\mathcal{N}}(x+iy)$ quelle que soit $\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_\mathbb{C}}$. Le calcul du second membre de (3) donne l'expression de $\tilde{\ell}(z)$ figurant dans le théorème.

b) Calcul de

$$\|f_z\| = \sup_{\substack{a\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \\ \|a\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}=1}} |\langle z,a\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}|.$$

On a,

$$\|f_z\| = \sup_{\substack{\|a\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}=1 \\ a\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} [|\langle x,a\rangle|^2_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} + |\langle y,a\rangle|^2_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}]^{1/2}.$$

Choisissons dans $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ un repère orthonormé $(e_i)_{i\in I}$, où e_1, e_2 sont dans le sous-espace vectoriel réel engendré par les vecteurs x et y de $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ (x et y supposés linéairement indépendants). Précisément soient :

$$e_1 = \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}\ ,\ e_2 = \alpha\frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} + \beta\frac{y}{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}$$

avec $\|e_1\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = 1$, $\langle e_1,e_2\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = 0$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

Des relations

$$\begin{aligned}\|e_2\|^2_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} &= \langle\alpha\frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} + \beta\frac{y}{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}, \alpha\frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} + \beta\frac{y}{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}\rangle \\ &= \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\frac{\langle x,y\rangle\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} = 1,\end{aligned}$$

$$\langle e_1,e_2\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = \alpha + \beta\frac{\langle x,y\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}} = 0,$$

on déduit :

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\langle x,y\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\sqrt{D}}\ (= 0,\ \text{si}\ \langle x,y\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = 0) \\ \beta &= \frac{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\sqrt{D}}\ (= 1,\ \text{si}\ \langle x,y\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = 1)\end{aligned}$$

avec $D = \|x_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}\|^2\|y\|^2_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} - \langle x,y\rangle^2_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}$.

Soient

$$a = \sum_i a_ie_i\ ,\ x = \|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}e_1 = x_1e_1$$

et

$$y = \frac{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\beta}(e_2-\alpha e_1) = \frac{\langle x,y\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}e_1 + \frac{\sqrt{D}}{\|x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}, e_2 = y_1e_1+y_2e_2$$

$$\begin{aligned}\langle x, a\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} &= x_1 a_1\\ \langle y, a\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} &= y_1 a_1 + y_2 a_2.\end{aligned}$$

D'où

$$(3)' \qquad \|f_z\|^2 = \sup_{\substack{a_1^2+a_2^2\le 1\\ a_1,a_2\in\mathbb{R}}} [(x_1^2+y_1^2)a_1^2 + 2y_1y_2a_1a_2 + y_2^2a_2^2].$$

Le crochet est une forme quadratique en a_1, a_2, positive, et atteint son maximum sur le cercle $a_1^2 + a_2^2 = 1$. (Le crochet a un laplacien ≥ 0 ; il est donc sousharmonique).

Pour calculer (3)' choisissons la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

Soit

$$\begin{aligned}\varphi(a_1, a_2) &= (x_1^2+y_1^2)a_1^2 + 2y_1y_2a_1a_2 + y_2^2a_2^2 - t(a_1^2+a_2^2-1) =\\ &= Aa_1^2 + 2Ba_1a_2 + Ca_2^2 - t(a_1^2+a_2^2-1)\end{aligned}$$

$$(4) \qquad \begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} &= (A-t)a_1 + Ba_2 = 0\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} &= Ba_1 + (C-t)a_2 = 0.\end{aligned}$$

Le système (4) doit avoir une solution non nulle d'où

$$\text{dét}\begin{vmatrix} A-t & B\\ B & C-t\end{vmatrix} = t^2 - (A+C)t + AC - B^2 = 0$$

on en déduit

$$(5) \qquad t = A + C \pm \sqrt{(A+C)^2 - 4(AC-B^2)}.$$

De (4) et de la relation $a_1^2 + a_2^2 = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}Aa_1^2 + Ba_1a_2 &= ta_1^2\\ Ca_2^2 + Ba_1a_2 &= ta_2^2.\end{aligned}$$

Donc,

$$Aa_1^2 + 2Ba_1a_2 + Ca_2^2 = t.$$

D'après (5)

$$(6) \qquad \|f_z\|^2 = \frac{1}{2}(A+C+\sqrt{(A+C)^2 - 4(AC - B^2)}) = \frac{1}{2}(A+C+\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}).$$

Avec

$$A = \|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2 + \frac{\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2}$$
$$B = \frac{\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2}\sqrt{D}\ , \ \ C = \frac{D}{\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} A + C &= \|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2, A - C = \\ &= \|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2 + \frac{\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2} - \frac{\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2\|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2 - \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2}{\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2} \\ A - C &= \|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2 - \|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2 + \frac{2\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}}{\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2} \\ (A - C)^2 + 4B^2 &= (\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2 - \|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2)^2 + 4\frac{\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^4}{\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^4} + \\ &+ 4\frac{\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2}{\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2}\ (\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2 - \|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2) + \\ &+ 4\frac{\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2}{\|x\|_{\mathcal{H}}^4}\ (\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2\|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2 - \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2) = \\ &= (\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2 - \|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2)^2 + 4\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2. \end{aligned}$$

D'après (6)

$$\|f_z\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2 + \sqrt{(\|x\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2 - \|y\|_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2)^2 + 4\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2})$$

on retrouve l'expression de $\tilde{\ell}(z)$. D'où

$$\|f_z\| = \tilde{\ell}(z).$$

c) La fonction d'appui d'un compact K de $\mathbb{C}^N$ est la fonction positivement homogène d'ordre 1 et sous-additive $H_K(z) = \max_{\zeta\in K} Re\langle\zeta, z\rangle$, ou Re désigne la partie réelle de $\langle\zeta, z\rangle = \zeta_1 z_1 + \cdots + \zeta_N z_N$.

Soit $K = \overline{BL(0,1)}$ l'adhérence de la boule unité de Lie dans $\mathbb{C}^N$, on a si L désigne la norme de Lie :

$$H_K(z) = \max_{L(\zeta)\leq 1} Re\langle\zeta, z\rangle = \log[\max_{L(\zeta)\leq 1} |e^{\langle\zeta,z\rangle}|]$$

pour z fixe, $e^{\langle\zeta,z\rangle}$ étant holomorphe en ζ, le maximum figurant dans le crochet, est atteint sur la frontière de Bergman-Šilov $\check{\mathcal{B}}$ de $\overline{BL(0,1)}$. Or (cf. [A])

$$\check{\mathcal{B}} = \{\zeta = ae^{i\theta} \mid a \in \mathbb{R}^N, \|a\| = 1, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Donc, si $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} H_K(z) &= \max_{\substack{\|a\|=1\\ \theta\in\mathbb{R}}} Re\langle ae^{i\theta}, z\rangle = \max_{\substack{\|a\|=1\\ \theta\in\mathbb{R}}} Re\langle a, e^{i\theta}(x+iy)\rangle \\ &= \max_{\substack{\|a\|=1\\ \theta\in\mathbb{R}}} [\langle a, x\cos\theta - y\sin\theta\rangle] \\ &= \max_{\|a\|=1} [\langle x, a\rangle^2 + \langle y, a\rangle^2]^{1/2} = \ell_N(z). \end{aligned}$$

D'où le résultat

Corollaire 1. *A chaque ouvert, convexe borné et disqué D de $\mathbb{C}^N$ est associée une norme ℓ_D qui est minimale dans la classe $(\mathcal{N})_D$ des normes $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{C}^N$ vérifiant :*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(z) &\leq J_D(z) \quad \textit{si } z \in \mathbb{C}^N \\ \mathcal{N}(x) &= J_D(x) \quad \textit{si } x \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

où J_D est la jauge de D. Le domaine

$$\tilde{D}_0 = \{z \in \mathbb{C}^N \mid \ell_D(z) < 1\}$$

est le plus grand ouvert convexe, borné et disqué de $\mathbb{C}^N$ qui contient D et dont la trace sur $\mathbb{R}^N$ est égale à $D \cap \mathbb{R}^N$. On a

$$\ell_D(z) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} J_D(x \sin\theta + y\cos\theta)\ ,\ \ z = x + iy.$$

Rappelons que $J_D(z) = \inf\{\alpha > 0 \mid z \in \alpha D\}$ et que les hypothèses sur D impliquent que ℓ_D est une norme. La démonstration du corollaire est analogue à celle du théorème 1 en considérant la norme
$\rho_{D_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+,\ \rho_D(\zeta, \eta) = \mathcal{N}(\zeta \dfrac{x}{J_D(x)} + i\eta \dfrac{y}{J_D(y)})$ où $\mathcal{N} \in (\mathcal{N})_D$ et $z = x + iy$, x et y linéairement indépendants.

Exemple. Soit $\ell^2_{\mathbb{R}}$ l'espace de Hilbert des suites réelles $x = (x_n)_{n \geq 1}$ avec

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \text{ et } \langle x, y\rangle_{\ell^2_{\mathbb{R}}} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

soit $\ell^2_{\mathbb{C}}$ le complexifié de $\ell^2_{\mathbb{R}}$: $z = x + iy \in \ell^2_{\mathbb{C}}$,

$$\langle z, z'\rangle_{\ell^2_{\mathbb{C}}} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \overline{z}'_n\ ,\ \|z\|_{\ell^2_{\mathbb{C}}} = (\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^2)^{1/2}.$$

Alors

$$z \mapsto \tilde{\ell}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\|z\|^2_{\ell_{\mathbb{C}}} + \sqrt{(\|x\|^2_{\ell^2_{\mathbb{R}}} - \|y\|^2_{\ell^2_{\mathbb{R}}})^2 + 4(\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n)^2}\right]^{1/2}$$

est une norme sur $\ell^2_{\mathbb{C}}$ qui coïncide avec la norme $\|z\|_{\ell^2_{\mathbb{R}}}$ sur $\ell^2_{\mathbb{R}}$, et minore la norme $\|z\|_{\ell^2}$ ainsi que toutes les normes sur $\ell^2_{\mathbb{C}}$ majorées par $\|z\|_{\ell^2_{\mathbb{C}}}$ et qui coïncident avec $\|x\|_{\ell^2_{\mathbb{R}}}$ si $z = x$.

3. *Interprétation géométrique des normes $\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$*

A tout $z = x + iy \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ (complexifié de l'espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$) associons la sphère $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ comme suit :

Soient

$$\Pi = \{t \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \mid \langle t - x, y\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = 0\}$$
$$(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}) = \{t \in \Pi \mid \|t - x\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}\}$$

et ω la projection orthogonale de 0 sur Π.

La droite $(d) \subset \Pi, (d) = \{t = \omega + k(x-\omega), k \in \mathbb{R}\}$ coupe la sphère $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ en deux points* α et β (cf. Fig. 1, on remarquera que $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ est réduite au point x si $z = x \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ et, dans le cas $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ se compose de deux points $(z_1 + iz_2), (\bar{z}_1 + i\bar{z}_2)$ du plan complexe).

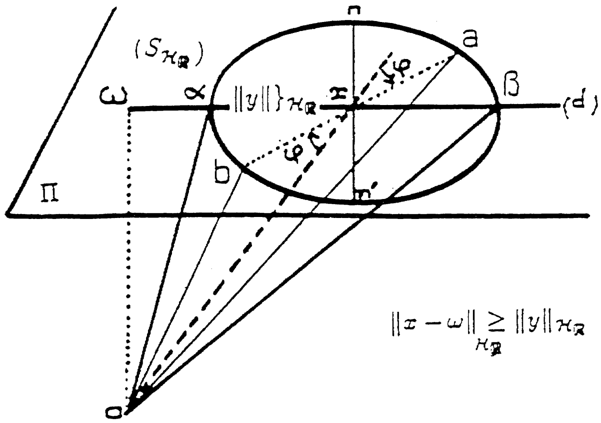

Fig. 1

THÉORHÈME 2. *Soit $\tilde{\ell} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ la norme minimale (théorème 1). On a*

$$\tilde{\ell}(z) = \frac{1}{2}(\|\alpha\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} + \|\beta\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}).$$

Plus généralement, à toute norme $\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ et $z = x + iy \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ donné correspond deux points $a, b = 2x - a$ de $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ tels que

$$\tilde{\mathcal{N}}(z) = \frac{1}{2}(\|a\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} + \|b\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}).$$

*qui correspondent aux valeurs $k_1 = 1 - \frac{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\|x-\omega\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}, k_a = 1 + \frac{\|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}{\|x-\omega\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}}$.

Démonstration.

Dans le cas $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^N$ la transformation T qui associe au point $z = x + iy \in \mathbb{C}^N$ la sphère $(S_{\mathbb{R}^N}^{N-2})$ est utilisée pour la détermination des cellules d'harmonicité des ouverts de $\mathbb{R}^N[A]$. Il semble séduisant qu'une telle transformation permet de donner une interprétation de la valeur de $\tilde{\mathcal{N}}(z)$.

La démonstration consiste à calculer la somme

$$\frac{1}{2}(\|\alpha\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} + \|\beta\|_{\mathcal{H}\mathbb{R}})$$

et retrouver l'expression de $\tilde{\ell}(z)$.

Supposons le point ω à l'extérieur de $(S_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}})$ (i.e. $\|x-\omega\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} \geq \|y\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}$. Les calculs sont analogues dans le cas contraire et $y \neq 0$.

D'après la loi de la médiane on a (Fig. 1) en posant $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}} = \|\cdot\|$:

$$\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{7}$$

Dans le triangle rectangle $(0, \omega, x)$,

$$\|x-\omega\|^2 = \|x\|^2 - \|\omega\|^2 = \|x\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}{\|y\|^2} = \frac{D}{\|y\|^2}$$

avec $D = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2$. D'où

$$\|x-\omega\| = \frac{\sqrt{D}}{\|y\|}$$
$$\|\alpha-\omega\| = \frac{\sqrt{D}}{\|y\|} - \|y\|.$$

Du triangle $(0, \omega, \alpha)$ on déduit,

$$\|\alpha\|^2 = [\frac{\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}^2}{\|y\|^2} + \frac{D}{\|y\|^2} + \|y\|^2 - 2\sqrt{D}].$$
$$\|\alpha\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\sqrt{D} \tag{8}$$

et d'après (7),

$$\|\beta\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sqrt{D} \tag{9}$$

de (8) et (9) on déduit

$$(\|\alpha\| + \|\beta\|)^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|\alpha\|\|\beta\|)$$

et

$$\|\alpha\|\|\beta\| = [(\|x\|^2 + \|y\|^2)^2 - 4D]^{1/2} = [(\|x\|^2 - \|y\|^2)^2 + 4\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2]^{1/2}.$$

Finalement

$$(\|\alpha\| + \|\beta\|)^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2 + \sqrt{(\|x\|^2 - \|y\|^2)^2 + 4\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2}]$$

et

$$\frac{1}{2}(\|\alpha\| + \|\beta\|)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\|x\|^2 + \|y\|^2 + \sqrt{(\|x\|^2 - \|y\|^2)^2 + 4\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}^2}]^{1/2} = \tilde{\ell}(z)$$

Remarque. Si $\mathcal{H}_\mathbb{C} = \mathbb{C}^N$, $\|\beta\| = L(z)$ (la norme de Lie).

Des calculs analogues montrent qu'étant donné une norme $\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_\mathbb{C}}$ et le point $z = x + iy \in \mathcal{H}_\mathbb{C}$, on peut trouver deux points $a, b = 2x - a$ de $(S_{\mathcal{H}_\mathbb{R}})$ tels que

$$\tilde{\mathcal{N}}(z) = \frac{1}{2}(\|a\| + \|b\|).$$

En effet, plaçons-nous dans le cas $x \neq 0, y \neq 0$ et $(S_{\mathcal{H}_\mathbb{R}})$ non réduite à deux points.

Soient $a \in (S_{\mathcal{H}_\mathbb{R}})$ un point quelconque et $b = 2x - a$.

Posons

$$\varphi = \text{l'angle } (\widehat{0x, xa})$$

défini par

$$\langle x, x - a\rangle_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} = \|x\|\|y\| \cos\varphi \qquad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

On obtient :

$$(10)\qquad \frac{1}{2}(\|a\|+\|b\|)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\|x\|^2+\|y\|^2+\sqrt{(\|x\|^2-\|y\|^2)^2-4\|x\|^2\|y\|^2\|\cos^2\varphi]}$$

ou

$$\frac{1}{2}(\|a\|+\|b\|)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\|x\|^2+\|y\|^2+\sqrt{(\|x\|^2-\|y\|^2)^2+4\|x\|^2\|y\|^2\|\sin^2\varphi]}^{1/2}.$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $a = n$, $(n-x)\perp(\alpha-x)$, ou $(n-x)\perp(x)$ on retrouve la norme $\|z\| = \frac{1}{2}(\|n\|+\|n'\|)$.

Soit $\tilde{\mathcal{N}} \in (\tilde{\mathcal{N}})_{\mathcal{H}_\mathbb{C}}$. Il suffit de montrer qu'il existe φ tel que l'expression figurant dans (10) soit égale à $\tilde{\mathcal{N}}(z)$. Posons $\cos\theta = \frac{\tilde{\mathcal{N}}(z)}{\|z\|}$, $0 \le \theta = \theta(z) \le \frac{\pi}{2}$, $\theta(x) = 0$ si $x \in \mathcal{H}_\mathbb{R}$.

Le carré du second membre de (10) s'écrit

$$\frac{1}{2}(\|z\|^2 + [\|z\|^4 - 4\|x\|^2\|y\|^2\cos^2\varphi]).$$

D'où les relations

$$\begin{aligned} 2\cos^2\theta\|z\|^2 &= \|z\|^2 + (\|z\|^4 - 4\|x\|^2\|y\|^2\cos^2\varphi)^{1/2} \\ ((\cos 2\theta)\|z\|^2)^2 &= \|z\|^4 - 4\|x\|^2\|y\|^2\cos^2\varphi \\ (1-\cos^2 2\varphi)\|z\|^4 &= 4\|x\|^2\|y\|^2\cos^2\varphi \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \sin 2\theta\cdot\|z\|^2 &= 2\|x\|\|y\|\cos\varphi \\ |\cos\varphi| &= \frac{\|z\|^2}{2\|x\|\|y\|}\ \sin 2\theta \qquad \begin{pmatrix} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ x \ne 0, y \ne 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ou

$$(11)\qquad |\cos\varphi| = \frac{\tilde{\mathcal{N}}(z)\sqrt{\|z\|^2 - \tilde{\mathcal{N}}^2(z)}}{\|x\|\|y\|}.$$

Le second nombre de (11) est toujours ≤ 1. En effet cette affirmation équivaut à
$$\tilde{\mathcal{N}}^4 - \|z\|^2\tilde{\mathcal{N}} + \|x\|\|y\| \geq 0 \qquad (\tilde{\mathcal{N}} = \tilde{\mathcal{N}}(z))$$
ce qui est vérifié puisque les racines du trinôme
$$X^2 - \|z\|^2 X + \|x\|^2\|y\|^2$$
sont $X_1 = \|x\|^2$, $X_2 = \|y\|^2$ et on a $\tilde{\mathcal{N}}^2(z) \leq \max(\|x\|^2, \|y\|^2)$ d'après (2). Ainsi l'équation (11) a deux solutions φ_0, $\pi - \varphi_0$ qui correspondent à deux points $a, b \in (S_{\mathcal{H}_\mathbb{R}})$.

4. *Étude de la classe* $(S)_{\mathbb{C}^N}$.

On note
$$\lambda(V, z_0, R),\ A(V, z_0, R),\ M_V(R)$$
respectivement la moyenne de V sur la sphère $\partial B(z_0, R) = \{Z \in \mathbb{C}^N \mid \|z - z_0\| = R\}$ et sur la boule $B(z_0, R)$:
$$\begin{aligned}
\lambda(V, z_0, R) &= \frac{1}{\omega_N(1)} \int_{\|a\|=1} V(z_0 + Ra)\, d\omega_N(a), \\
A(V, z_0, R) &= \frac{2N}{R^{2N}} \int_0^R \lambda(V, z_0, t) t^{2N-1} dt. \\
M_V(R) &= \max_{\|z\|=R} V(z).
\end{aligned}$$

Si $V \in (S)_{\mathbb{C}^N}$, $\log V$ est p.s.h et vérifie

a') $\qquad \log V(kz) = \log|k| + \log V(z)$

b') $\qquad \log V(z) \leq \log\|z\|\ (z \in \mathbb{C}^N)$

$\qquad \log V(x) = \log\|x\|\ (x \in \mathbb{R}^N)$.

Proposition 1. *Pour toute* $V \in (S)_{\mathbb{C}^N}$ *on a :*

1) $$M_{\log V}(R) = \log R$$

Si $N > 1$, $(S)_{\mathbb{C}^N}$ *ne contient aucun élément de la forme* $V = \log|F|$, F *entière.*

Si $N=1$, $(S)_{\mathbb{C}}$ est réduite au seul élément $|z|$.

2) $$\lambda(\log V,0,R)=\log R+\lambda(\log V,0,1)$$

avec, $\inf_{V\in(S)_{\mathbb{C}^N}}\lambda(V,0,1)\geq -(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2N-2})$.

3) $$A(\log V,0,R)=\log R-\frac{1}{2N}+\lambda(\log V,0,1).$$

4) *Toutes les fonctions* $\log V$, $V\in(S)_{\mathbb{C}^N}$ *ont dans la boule* $B(0,R)$ *la même masse*

$$\mu_{\log V}(R)=\frac{1}{2N-2}\ R^{2N-2}.$$

5) *Dans* $\mathbb{R}^2$ *rapporté à une base orthonormée* $(y,t=\log R)$ *les graphes des fonctions*

$$R\mapsto\lambda(\log V,0,R)$$
$$R\mapsto A(\log V,0,R)$$

sont des droites parallèles, situées dans une zone parallèle à la 1re bissectrice et limitée par les droites

$$y=\log R$$
$$y=\log R-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2N-2})-\frac{1}{2N}.$$

La démonstration résulte des propriétés élémentaires des fonctions p.s.h.

1. Remarquons que si $N>1$, $F(z)=\sum a_\alpha z^\alpha$, F entier, $|F|\notin(S)_{\mathbb{C}^N}$. En effet, si $|F|\in(S)_{\mathbb{C}}^N$,

$$\max_{\substack{|z_j|=r\\ j=1,\dots,N}}|F|\leq\sqrt{N}r$$

et $|a_\alpha|\leq\sqrt{N}\frac{r}{r^{|\alpha|}}$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_N$. D'où en faisant tendre r vers l'infini $|a_\alpha|=0$ si $|\alpha|>1$. Donc, $F(z)=a_1z_1+\cdots+a_Nz_N$. L'égalité $|F(x)|=\|x\|$ $(x\in\mathbb{R}^N)$ implique $|a_1|=\cdots=|a_N|=1$, et l'inégalité

$|a_1 z_1 + \cdots + a_N z_N| \leq \|z\|$ montre que $|a_j| = 1$, $|a_i| = 0$ si $i \neq j$. Finalement F doit être de la forme $e^{i\theta_j} z_j$. Mais alors $|F| = |z_j| \notin (S)_{\mathbb{C}^N}$. Si $N = 1$ $|F| = |z| \in (S)_{\mathbb{C}}$. Précisément dans ce cas $(S)_{\mathbb{C}}$ est réduite au seul élément $|z|$. (cf. préliminaires).

L'égalité 1) est une conséquence immédiate de l'hypothèse b$'$). D'autre part, $\lambda(\log V, 0, R)$ étant convexe de $\log R$ et majorée par $\log R$ est nécessairement de la forme $\log R + \lambda(\log V, 0, 1)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} A(\log V, 0, R) &= \frac{2N}{R^{2N}} \int_0^R [\log t + \lambda(\log V, 0, 1)] t^{2N-1} dt \\ &= \lambda(\log V, 0, 1) + \frac{2N}{R^{2N}} \int_0^R \log t . t^{2N-1} dt. \end{aligned}$$

Le calcul de la dernière intégrale donne :

$$A(\log V, 0, R) = \log R + \lambda(\log V, 0, 1) - \frac{1}{2N}. \tag{12}$$

La minoration figurant dans 2) résulte d'une inégalité de P. Lelong (P.L. [2] Th. 6) : Si f est une fonction p.s.h dans tout $\mathbb{C}^N$ et vérifie

$$\lim_{R \to \infty} \frac{M_f(R)}{\log R} = \sigma \qquad (0 < \sigma < \infty)$$

on a

$$M_f(R) - \lambda(f, 0, R) \leq C_N \sigma + C'_N (\sigma - \nu(0))$$

avec

$$\begin{aligned} C_N = \sum_{q=1}^{2N-2} \frac{1}{q} \, , \, C'_N = \sum_{q=2N-1}^{\infty} q^{-1} 2^{-q} \, , \, \nu(t) \\ = \frac{\partial}{\partial \log t} \, \lambda(f, 0, t), \nu(0) = \lim_{t \mapsto 0} \nu(t). \end{aligned}$$

Dans le cas $f = \log V$, $V \in (S)_{\mathbb{C}^N}$, on a, $\sigma = 1$, $\nu(0) = 1$. D'où l'estimation figurant dans 2).

L'égalité 3) résulte de 2) et (12). Enfin 4) est une conséquence de

$$\nu(R) = \frac{\partial}{\partial \log R} \lambda(\log V, 0, R) = 1 \qquad (V \in (S)_{\mathbb{C}^N})$$

$$\mu_{\log V}(R) = \frac{1}{2N-2} R^{2N-2} \nu(R) = \frac{1}{2N-2} R^{2N-2}$$

References

[A] Avanissian, V., Cellule d'harmonicit'e et prolongement analytique complexe, Travaux en cours Hermann, Paris (1985), 1–184.

[P.L.-1] Lelong, P., Fonctions entières de type exponentiel dans $\mathbb{C}^N$, Ann. Inst. Fourier, t. **XVI** (1966), 269–318.

[P.L.-2] Lelong, P., Sur les fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques et une extension du théorème de Banach-Steinhaus aux familles d'applications polynomiales, colloque d'analyse fonctionnelle, Liège sept. (1970), 21–45.

[P.L.-3] Lelong, P., Mesure de Mahler et calcul de constantes universelles pour les polynômes de N-variables, Math. Ann. **299** (1994), 673–695.

[H,P] Hahn-Petter Pflug, K. T., On minimal complex norm that extends the real Euclidian norm, Monatsh. Math. **105** (1988), 107–112.

(Received August 28, 1995)

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René-Descartes
67084 Strasbourg Cedex
France