J. Math. Sci. Univ. Tokyo
3 (1996), 91–107.

Confluence et phénomène de Stokes

By Changgui Zhang

0. Introduction

Une équation hypergéométrique confluente de Kummer:

$$E(a;c;t) \qquad t\frac{d^2y}{dt^2}+(c-t)\frac{dy}{dt}-ay=0,$$

où a et c sont des nombres complexes quelconques, peut être vue comme limite de l'équation hypergéométrique d'Euler et de Gauss :

$$E(a,b;c;x) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(c-(a+b+1)x)\frac{dy}{dx}-aby=0,$$

en faisant $x=t/b$ et $b\to\infty$. Le but de cet article est de décrire, à partir de la seconde équation, le phénomène de Stokes qui se produit dans la première.

En général, l'équation $E(a;c;t)$ admet deux points singuliers $t=0$ et $t=\infty$, l'un régulier et l'autre irrégulier, alors que pour l'équation $E(a,b;c;t/b)$ les trois points singuliers $t=0$, b, ∞ sont tous réguliers. Le passage à la limite de la seconde équation vers la première, quand $b\to\infty$, nous permet de lire la singularité irrégulière $t=\infty$ comme confluée de deux points singuliers $t=b$, ∞. Cette remarque est suggérée dans le Mémoire [Ga] de R. Garnier, dans lequel il considère une singularité irrégulière comme un amalgame de plusieurs points singuliers réguliers voisins. Dans cet esprit, J.-P. Ramis [Ra1] a montré, entre autres, que les multiplicateurs de Stokes associés à l'équation confluente sont limites de

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 34A20; Secondary 33C15, 34E05, 34E10.

formules de connexion convenablement choisies de l'équation à confluer. Par ailleurs, A. Duval [Du] a aussi appliqué cette idée (de confluence) à la description du groupe de Galois différentiel pour les équations de Bessel (modifiées). De notre côté, nous avons décrit dans le premier chapitre de notre thèse [Zh] le lien entre les invariants de Birkhoff [Bi] et la confluence des points singuliers pour les équations différentielles linéaires.

0.1. Plan de l'article –

Dans le présent article nous donnons les résultats principaux du second chapitre et de l'annexe de notre thèse [Zh]. Notre exposé va se diviser en deux parties. Dans un premier temps, on supposera que le paramètre b tend vers l'infini suivant une direction verticale. L'étude de la confluence des singularités rencontrées est alors étroitement liée à une interprétation de la transformée de Laplace en terme de limite de transformées d'Euler. Comme conséquence immédiate, on obtiendra de façon explicite dans ce cas le résultat de Ramis mentionné plus haut; voir aussi le début de §**1** pour comparer l'approche de Ramis à la nôtre. Noter que cette interprétation limite de la transformée de Laplace peut être regardée comme une version sous forme intégrale de la propriété suivante, découverte par K. Knopp [Kn] (*cf* [Ha] p. 181): l'itération de la transformation d'Euler sur les séries entières aboutit au procédé de sommation de Borel-Laplace.

En opposition à ce qui précède, dans la seconde partie de cet article, on fera l'hypothèse suivante: le paramètre b tend vers l'infini sur une direction horizontale. Sous cette hypothèse, les bases canoniques (renormalisées) de solutions de l'équation $E(a, b; c; t/b)$ associées respectivement aux points $t = b$, ∞ ne convergent plus. On introduira alors la notion de bases mixtes, ce qui fait intervenir, lors du calcul des multiplicateurs de Stokes de l'équation confluente, en plus de la formule de connexion, la matrice de monodromie de l'équation à confluer. On retrouve alors ces multiplicateurs par un passage à la limite dans une confluence discrète. Cette seconde approche, suggérée par J.-P. Ramis dans son article [Ra1], peut s'interpréter dans le langage d'un modèle géométrique "infinitésimal" de Martinet et Ramis [MR], [Ra2]. Nous terminerons par quelques indications sur ce point.

0.2. Notations préliminaires –

Pour simplifier l'exposé, nous nous proposons de traiter seulement les cas génériques; ceci revient à dire que toutes les équations évoquées dans cet article, $E(a;c;t)$, $E(a,b;c;x)$, ne font apparaître aucune fonction logarithmique dans leurs systèmes fondamentaux correspondant aux points singuliers. Nous renvoyons à notre thèse [Zh] (Chapitre 2, Annexe) pour un complément de cette étude pour les cas logarithmiques; voir aussi le paragraphe 1.5. ci-dessous pour quelques indications.

Fixons maintenant quelques notations constamment utilisées dans la suite. Nous conservons les notations standard pour les séries hypergéométriques ${}_2F_1(*,*;*;*)$, ${}_1F_1(*;*;*)$, ${}_2F_0(*,*;*)$. Nous noterons :

$$\begin{aligned}&\Sigma_0(x) = (w_1(x), w_2(x)), \quad \Sigma_1(x) = (w_3(x), w_4(x)),\\ &\Sigma_\infty(x) = (w_5(x), w_6(x)),\end{aligned} \tag{0.2.1}$$

avec

$$\begin{aligned}
w_1(x) &= {}_2F_1(a,b;c;x),\\
w_2(x) &= x^{1-c}{}_2F_1(1+a-c,1+b-c;2-c;x),\\
w_3(x) &= x^{-a}{}_2F_1(a,a+1-c;a+b+1-c;1-1/x),\\
w_4(x) &= x^{a-c}(1-x)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,1-a;c+1-a-b;1-1/x),\\
w_5(x) &= x^{-a}e^{i\pi a}{}_2F_1(a,a+1-c;a+1-b;-1/x),\\
w_6(x) &= x^{a-c}e^{i\pi(c-a)}(1-x)^{c-a-b}{}_2F_1(1-a,c-a;b+1-a;1/x),
\end{aligned}$$

les systèmes fondamentaux “classiques” de solutions de l'équation $E(a,b;c;x)$ au voisinage des points singuliers (réguliers) $x = 0$, 1 et ∞ respectivement (*cf* [Lu], p. 68).

$$\begin{aligned}&\Sigma_0^b(t) = (w_1^b(t), w_2^b(t)), \quad \Sigma_b^b(t) = (w_3^b(t), w_4^b(t)),\\ &\Sigma_\infty^b(t) = (w_5^b(t), w_6^b(t))\end{aligned} \tag{0.2.2}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Sigma_0^b(t) &= \Sigma_0(t/b)N_0, \qquad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & b^{1-c}\end{pmatrix},\\
\Sigma_b^b(t) &= \Sigma_1(t/b)N_b, \qquad N_b = \begin{pmatrix} b^{-a} & 0\\ 0 & b^{a-c}\end{pmatrix},\\
\Sigma_\infty^b(t) &= \Sigma_\infty(t/b)N_\infty, \qquad N_\infty = \begin{pmatrix} e^{-\pi i a}b^{-a} & 0\\ 0 & e^{i\pi(a-c)}b^{a-c}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

le système fondamental de solutions renormalisé de l'équation $E(a, b; c; t/b)$ au voisinage des points singuliers $t = 0$, b et ∞ avec les renormalisations N_0, N_b, N_∞ respectivement (cf [Ra1]). Nous noterons :

$$\widetilde{\Sigma}_0 = (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)), \qquad \widetilde{\Sigma}_\infty = (\widetilde{U}(t), \widetilde{V}(t)), \tag{0.2.3}$$

avec

$$\begin{aligned} &\tilde{u}(t) = {}_1F_1(a; c; t), \qquad \tilde{v}(t) = t^{1-c}{}_1F_1(a - c + 1; 2 - c; t), \\ &\widetilde{U}(t) = t^{-a}{}_2F_0(a, 1 + a - c; -1/t), \qquad \widetilde{V}(t) = t^{a-c}e^t{}_2F_0(c - a, 1 - a; 1/t), \end{aligned}$$

le système fondamental de solutions en $t = 0$ et ∞ pour l'équation confluente $E(a; c; t)$, en utilisant respectivement des séries convergentes et formelles.

Rappelons que les fonctions précédentes "vivent" soit sur un revêtement universel de $\mathbf{C} \setminus \{0, \delta\}$ ($\delta = 1$ ou b selon le cas), soit sur la surface de Riemann du logarithme. Soient $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\beta \in \mathbf{R}$ tels que $\alpha < \beta$. Le symbôle $S(\alpha; \beta)$ signifiera le secteur ouvert défini par:

$$S(\alpha; \beta) = \{t \in \mathbf{C}^* \;:\; \alpha < \arg t < \beta\}.$$

1. La transformée de Laplace vue comme limite de transformées d'Euler

Rappelons que dans l'article [Ra1], en appliquant la méthode de ressommation de Borel-Laplace au système de solutions formelles canoniques à l'infini pour l'équation $E(a; c; t)$, on étudie les multiplicateurs de Stokes correspondants et les interprète comme limites de formules de connexion convenablement choisies de l'équa-tion $E(a, b; c; t/b)$. Dans la suite, nous nous intéressons à étudier les solutions de la seconde équation avec b tendant vers l'infini sur une direction verticale. Pour cela nous commençons par la représentation intégrale des solutions rappelées dans le paragraphe précédent. Nous nous proposons de montrer ensuite que les solutions $w_j^b(t)$, $j = 1, \ldots, 6$, convergent dans certains secteurs vers des solutions analytiques de l'équation limite $E(a; c; t)$. Cette convergence s'obtiendra par une interprétation limite de la transformée de Laplace; voir §1.2. ci-dessous. Comme conséquence, on en déduira, pour l'équation $E(a; c; t)$, les multiplicateurs de Stokes à partir des formules de connexion entre les solutions w_j^b.

1.1. Représentations intégrales –

La série hypergéométrique ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ peut être représentée au moyen de la transformée d'Euler si les parties réelles des paramètres α, β, γ satisfont à certaines inégalités. D'une façon précise, on a, pour $x \in \mathbf{C} \setminus [1, +\infty[$ (*cf*, par exemple, [Go] Chap. II),

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 \xi^{\alpha-1}(1 - \xi)^{\gamma-\alpha-1}(1 - x\xi)^{-\beta} d\xi $$

lorsque l'on a $\Re\alpha > 0$ et $\Re\gamma > \Re\alpha$. On en déduit les formules suivantes:

$$ \begin{aligned}
&(1.1.1) \quad w_1(x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \xi^{a-1}(1-\xi)^{c-a-1}(1-x\xi)^{-b} d\xi, \\
&\qquad x \in \mathbf{C} \setminus [1, +\infty[, \qquad \Re a > 0, \quad \Re c > \Re a; \\
&(1.1.2) \quad w_2(x) = \frac{\Gamma(2-c)x^{1-c}}{\Gamma(1+a-c)\Gamma(1-a)} \\
&\qquad\qquad \times \int_0^1 \xi^{a-c}(1-\xi)^{-a}(1-x\xi)^{c-b-1} d\xi, \\
&\qquad x \in \mathbf{C} \setminus [1, +\infty[, \qquad \Re(a-c) > -1, \quad \Re a < 1; \\
&(1.1.3) \quad w_3(x) = \frac{\Gamma(a+b+1-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b+1-c)} \int_0^{+\infty} \xi^{a-1}(1+\xi)^{c-a-1}(1+\xi x)^{-b} d\xi, \\
&\qquad |\arg x| < \pi, \qquad \Re a > 0, \quad \Re(b-c) > -1; \\
&(1.1.4) \quad w_4(x) = \frac{\Gamma(c+1-a-b)(1-x)^{c-a-b}}{\Gamma(c-a)\Gamma(1-b)} \\
&\qquad\qquad \times \int_0^{+\infty} \xi^{c-a-1}(1+\xi)^{a-1}(1+\xi x)^{b-c} d\xi, \\
&\qquad |\arg x| < \pi, \qquad \Re c > \Re a, \quad \Re b < 1; \\
&(1.1.5) \quad w_5(x) = \frac{\Gamma(a+1-b)(x-1)^{-a}}{\Gamma(a)\Gamma(1-b)} \\
&\qquad\qquad \times \int_0^{+\infty} \xi^{a-1}(1+\xi)^{c-a-1}(1+\xi x/(x-1))^{b-c} d\xi, \\
&\qquad x \in \mathbf{C} \setminus [0, 1], \qquad \Re a > 0, \quad \Re b < 1; \\
&(1.1.6) \quad w_6(x) = \frac{\Gamma(b+1-a)(1-x)^{-b} e^{\pi i(a-c)}}{\Gamma(c-a)\Gamma(b+1-c)}
\end{aligned} $$

$$\times \int_0^{+\infty} \xi^{c-a-1}(1+\xi)^{a-1}(1+\xi x/(x-1))^{-b} d\xi,$$
$$x \in \mathbf{C} \setminus [0,1], \qquad \Re c > \Re a, \quad \Re(b-c) > -1.$$

On pose $x = t/b$ dans les formules (1.1.1–6). On obtient une représentation intégrale pour chacune des fonctions $w_j^b(t)$ ($j = 1, \ldots, 6$) définies en (0.2.2). Par exemple, l'équation (1.1.1) équivaut à la suivante:

$$w_1^b(t) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \xi^{a-1}(1+\xi)^{c-a-1}(1-t\xi/b)^{-b} d\xi,$$
$$t \in \mathbf{C} \setminus [b, \infty e^{i \arg b}[, \qquad \Re c > \Re a > 0,$$

ce qui donne, lorsque $\Re c > \Re a > 0$ et $b \to \infty$, la limite

$$\lim_{b\to\infty} w_1^b(t) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \xi^{a-1}(1+\xi)^{c-a-1} e^{\xi t} d\xi$$

pour tout $t \in \mathbf{C}$. Le second membre de la formule précédente représente la fonction $\tilde{u}(t)$ définie dans (0.2.3), il vient donc:

$$\lim_{b\to\infty} w_1^b(t) = \tilde{u}(t), \qquad t \in \mathbf{C}, \quad \Re c > \Re a > 0. \tag{1.1.7}$$

On a de même:

$$\lim_{b\to\infty} w_2^b(t) = \tilde{v}(t), \qquad t \in \mathbf{C}, \quad \Re c - 1 < \Re a < 1. \tag{1.1.8}$$

Les formules (1.1.7) et (1.1.8) subsistent même si l'on relâche les conditions indiquées ci-dessus pour a et c. Cela se voit en utilisant une intégrale de contour convenable telle que $\int_{(0+)}^{(1+)}$, à la place de $\int_0^1$. Dans le reste de cette partie, on va considérer le problème du calcul éventuel de la limite de $w_j^b(t)$ pour $j = 3, 4, 5, 6$ respectivement.

Considérons par exemple la fonction $w_3^b(t)$. Partant de la formule (1.1.3) et la définition (0.2.2), on a

$$w_3^b(t) = \frac{\Gamma(a+b+1-c)b^{-a}}{\Gamma(a)\Gamma(b+1-c)} \tag{1.1.9}$$
$$\times \int_0^{+\infty} \xi^{a-1}(1+\xi)^{c-a-1}(1+t\xi/b)^{-b} d\xi,$$
$$|\arg(t/b)| < \pi, \qquad \Re a > 0, \quad \Re b > \Re c - 1.$$

Par la formule de Stirling pour la fonction Gamma, on a

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\Gamma(a+b+1-c)b^{-a}}{\Gamma(a)\Gamma(b+1-c)}=\frac{1}{\Gamma(a)} \tag{1.1.10}$$

lorsque b tend vers l'infini avec $|\arg b|<\pi-\epsilon$ $(0<\epsilon<\pi)$. On est alors conduit à étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\xi^{a-1}(1+\xi)^{c-a-1}(1+t\xi/b)^{-b}d\xi$.

1.2. Lemme de limite –

Nous nous proposons de prouver le résultat suivant:

Lemme. *Soit $a\in\mathbf{C}$. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbf{R}^+$. Si b tend vers l'infini suivant une direction verticale dans un demi-plan à droite : $\Re b\geq\Re a$ fixé et $\Im b\to+\infty$ ou $-\infty$, on a alors*

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{+\infty}f(\xi)(1+\xi t/b)^{a-b}d\xi=\int_0^{+\infty}f(\xi)e^{-\xi t}d\xi \tag{1.2.1}$$

uniformément pour $t\in K$, K étant un compact quelconque du domaine $S(-\pi/2;\pi/2)$:

$$S(-\pi/2;\pi/2)=\{t\in\mathbf{C}^*\ :\ -\pi/2<\arg t<\pi/2\}.$$

Preuve. On ne considère que le cas $a=0$. Le cas général en résulte par un changement de paramètre trivial. On note que, d'une part, l'intégrale limite dans la formule (1.2.1) est définie dans le domaine $S(-\pi/2;\pi/2)$, et, d'autre part, la fonction à intégrer, $f(\xi)(1+\xi t/b)^{-b}$, tend vers $f(\xi)e^{-\xi t}$. En plus, pour $A>0$ arbitrairement fixé et K un compact quelconque de $S(-\pi/2,\pi/2)$, comme la fonction $(1+\xi t/b)^{-b}$ converge vers $e^{-\xi t}$, unifomément pour $(\xi,t)\in[0,A]\times K$, on a

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{A}f(\xi)(1+\xi t/b)^{-b}d\xi=\int_0^{A}f(\xi)e^{-\xi t}d\xi$$

uniformément pour $t \in K$. La preuve du lemme s'obtiendra si l'on a la propriété suivante : étant donné $\epsilon > 0$, on peut choisir un $A_\epsilon > 0$ tel que l'on ait pour tout $t \in K$,

$$\Big| \int_{A_\epsilon}^{+\infty} f(\xi)\big((1+\xi t/b)^{-b} - e^{-\xi t}\big) d\xi \Big| < \epsilon \tag{1.2.2}$$

lorsque b tend vers l'infini sur une demi-droite verticale, avec $\Re b \geq 0$.

On va expliquer comment choisir une telle constante A_ϵ satisfaisant à l'inégalité (1.2.2). L'idée est de majorer le module $|(1+\xi t/b)^{-b} - e^{-\xi t}|$ par une constante finie C, car la quantité $\int_A^{+\infty} |f(\xi)| d\xi$ tend vers zéro avec $1/A$.

On suppose $\Im b \to +\infty$ (le cas $\Im b \to -\infty$ est similaire). Considérons le module

$$|(1+\xi t/b)^{-b}| = |1+\xi t/b|^{-\Re b} e^{\Im b \arg(1+\xi t/b)}.$$

Pour $\xi \geq 0$, $t \in K \subset S(-\pi/2; \pi/2)$ (K étant compact!), on a

$$-\pi + \delta < \arg(t/b) < -\delta < 0, \qquad \arg(1+\xi t/b) \leq 0$$

lorsque $\Im b \to +\infty$, $\Re b \geq 0$ étant fixé (donc, $\arg b \to \pi/2$). Il en résulte une borne supérieure pour le module $|(1+\xi t/b)^{-b}|$. Vu que $|e^{-\xi t}| \leq 1$ pour $(\xi, t) \in [0, +\infty[\times K$, la différence $\big|(1+\xi t/b)^{-b} - e^{-\xi t}\big|$ est uniformément bornée sur $[0, +\infty[\times K$ dès que $\Im b > B$. Ceci implique l'existence de A_ϵ dans la formule (1.2.2). $\square$

COROLLAIRE. *Soit $a \in \mathbf{C}$. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbf{R}^+$. Si b tend vers l'infini suivant une direction verticale dans un demi-plan à gauche : $\Re b \leq \Re a$ fixé et $\Im b \to +\infty$ ou $-\infty$, on a*

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^{+\infty} f(\xi)(1+\xi t/b)^{b-a} d\xi = \int_0^{+\infty} f(\xi) e^{\xi t} d\xi$$

uniformément pour $t \in K$, K étant un compact quelconque du domaine

$$S(\pi/2; 3\pi/2) = \{t \in \mathbf{C}^* \ : \ \pi/2 < \arg t < 3\pi/2\}.$$

PREUVE. Il suffit de faire le changement de variable $t \mapsto -t$ dans le lemme précédent. $\square$

Remarquons que le lemme ainsi que son corollaire restent vrais pour une fonction intégrable sur une demi-droite quelconque telle que $e^{i\theta}\mathbf{R}^+$, ce que nous utiliserons fréquemment dans la suite.

1.3. Convergence des solutions w_j^b –

Considérons d'abord la fonction $w_3^b(t)$. En tenant compte de (1.1.9), (1.1.10) et du lemme du paragraphe précédent, on a, lorsque $\Re a > 0$ et b tend vers l'infini, $\Re b$ étant fixé tel que $\Re b > \Re c - 1$:

$$\lim_{\Im b \to \infty} w_3^b(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \xi^{a-1}(1+\xi)^{c-a-1} e^{-\xi t} d\xi \tag{1.3.1}$$

uniformément sur tout compact $K \subset S(-\pi/2; \pi/2)$. En modifiant continuement le chemin d'intégration $\mathbf{R}^+$ en $\mathbf{R}^+ e^{i\theta}$ ($\theta \in]-\pi, \pi[$), la fonction limite de (1.3.1) se prolonge analytiquement sur le secteur $S(-3\pi/2; 3\pi/2)$. Nous la noterons par $U(a; c; t)$; elle est solution de l'équation confluente $E(a; c; t)$. Comme la fonction $w_3^b(t)$ est définie sur le revêtement universel de $\mathbf{C} \setminus \{0, b\}$, la limite (1.3.1) s'étend, d'une manière évidente, sur tout compact $K \subset S(-3\pi/2; 3\pi/2)$. En conclusion, on a

$$\lim_{\Im b \to \infty} w_3^b(t) = U(a; c; t) \qquad (\Re a > 0, \quad \Re b > \Re c - 1) \tag{1.3.2}$$

uniformément pour $t \in K$, K étant un compact quelconque du secteur $S(-3\pi/2; 3\pi/2)$.

On peut faire un raisonnement identique pour w_4^b, w_5^b et w_6^b. La fonction $w_4^b(t)$ est définie dans le voisinage de $t = b$, et sa branche principale est déterminée près de $t = b$. On a, lorsque $\Re c < \Re a$ et $\Re b < 1$,

$$\lim_{\Im b \to +\infty} w_4^b(t) = e^{\pi i(a-c)} V_+(t), \qquad t \in S(-\pi/2; 5\pi/2), \tag{1.3.3}$$

$$\lim_{\Im b \to -\infty} w_4^b(t) = e^{\pi i(c-a)} V_-(t), \qquad t \in S(-5\pi/2; \pi/2), \tag{1.3.4}$$

où l'on a posé $V_+(t) = V(a; c; t)$ et $V_-(t) = V(a; c; e^{2\pi i} t)$. La fonction $V(a; c; t)$ est définie et analytique sur le secteur $S(-\pi/2, 5\pi/2)$ et sa restriction à $S(\pi/2; 3\pi/2)$ est:

$$V(a; c; t) = \frac{e^t}{\Gamma(c-a)} \int_0^{+\infty} \xi^{c-a-1}(1+\xi)^{a-1} e^{\xi t} d\xi, \qquad t \in S(\pi/2; 3\pi/2).$$

A partir des intégrales de (1.1.5) et (1.1.6), on peut vérifier les résultats suivants.

Pour w_5^b : lorsque $\Re a > 0$ et $\Re b < 1$, on a

$$\lim_{\Im b \to +\infty} w_5^b(t) = e^{-2\pi i a} U_+(t), \qquad t \in S(\pi/2; 7\pi/2), \tag{1.3.5}$$

$$\lim_{\Im b \to -\infty} w_5^b(t) = U_-(t), \qquad t \in S(-3\pi/2; 3\pi/2), \tag{1.3.6}$$

où l'on a posé

$$U_+(t) = U(a; c; e^{-2\pi i} t), \qquad U_-(t) = U(a; c; t).$$

Pour w_6^b : lorsque $\Re c > \Re a$ et $\Re b > \Re c - 1$, on a pour $t \in S(-\pi/2; 5\pi/2)$,

$$\lim_{\Im b \to \pm\infty} w_6^b(t) = e^{\pi i (a-c)} V_+(t). \tag{1.3.7}$$

En conclusion, on a établi la convergence des solutions w_j^b ($j = 3$, 4, 5, 6), avec certaines conditions sur la partie réelle de a, b et c. Or, comme on peut le constater facilement, cette convergence subsiste sans ces conditions supplémentaires quand on utilise l'intégrale de contour ou/et la formule de contiguté de Gauss (voir [Zh], Chapitre 2 pour des détails). Par conséquent, on parlera de la convergence sous la seule hypothèse: $\Im b \to \infty$.

1.4. Asymptotique et phénomène de Stokes –

Rappelons les notations $U(a; c; t)$ et $V(a; c; t)$ introduites dans le paragraphe précédent :

$$U_+(t) = U(a; c; e^{-2\pi i} t), \quad U_-(t) = U(a; c; t),$$
$$V_+(t) = V(a; c; t), \quad V_-(t) = V(a; c; e^{2\pi i} t).$$

On a les propriétés asymptotiques Gevrey-1 suivantes (*cf* [MR]) :

$$\begin{aligned} {}_2F_0(a, 1 + a - c; -1/t) &\sim t^a U_-(t), \\ {}_2F_0(a, 1 + a - c; -1/t) &\sim e^{-2\pi i a} t^a U_+(t) \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

pour $t \to \infty$ dans $S(-3\pi/2; 3\pi/2)$, $S(\pi/2; 7\pi/2)$ respectivement, tandis que

$$\begin{aligned} {}_2F_0(c - a, 1 - a; 1/t) &\sim t^{c-a} e^{-t} V_+(t), \\ {}_2F_0(c - a, 1 - a; 1/t) &\sim e^{2\pi i (c-a)} t^{c-a} e^{-t} V_-(t) \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

pour $t \to \infty$ dans $S(-\pi/2; 5\pi/2)$, $S(-5\pi/2; \pi/2)$ respectivement. Comme les fonctions $U(t)$, $V(t)$ sont toutes solutions de l'équation $E(a; c; t)$, il existe des relations linéaires pour les triplets (U_-, U_+, V_+) et (V_-, V_+, U_-), soit donc:

$$U_-(t) = \lambda e^{-2\pi i a} U_+(t) + \mu V_+(t), \qquad t \in S(\pi/2; 3\pi/2); \tag{1.4.3}$$

$$V_+(t) = \gamma U_-(t) + \delta e^{2\pi i(c-a)} V_-(t), \qquad t \in S(-\pi/2; \pi/2). \tag{1.4.4}$$

En tenant compte des relations (1.4.1) et (1.4.2), on vérifie facilement que $\lambda = \delta = 1$.

Déterminons maintenant la valeur de μ et γ. Considérons par exemple l'équation (1.4.3). D'après les formules (1.3.2), (1.3.5) et (1.3.7), les fonctions w_3^b, w_5^b et w_6^b convergent respectivement vers U_-, $e^{-2\pi i a} U_+$ et $e^{\pi i(a-c)} V_+$ pour $\Im b \to +\infty$. Or, on a (*cf* [Lu] p. 71):

$$\begin{aligned} w_3^b(t) = {} & \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a+b+1-c)}{\Gamma(b)\Gamma(b+1-c)} w_5^b \\ & + \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(a+b+1-c)e^{\pi i(c-a-b)} b^{c-2a}}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(a)} w_6^b, \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

ce qui conduit, lorsque $\Im b \to +\infty$, à la formule (1.4.3) avec $\lambda = 1$ et

$$\mu = \frac{2\pi i e^{\pi i(c-2a)}}{\Gamma(a)\Gamma(a+1-c)}.$$

Pour déterminer l'équation (1.4.4), considérons les formules (1.3.4), (1.3.6) et (1.3.7). La formule de connexion

$$\begin{aligned} w_4^b = {} & \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c+1-a-b)e^{\pi i(a+b-c)} b^{2a-c}}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)} w_5^b \\ & + \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c+1-a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(c-b)} w_6^b \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

implique, pour $\Im b \to -\infty$, la formule (1.4.4) avec $\delta = 1$ et

$$\gamma = -\frac{2\pi i e^{\pi i(c-a)}}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)}.$$

Les constantes μ et $-\gamma$ (ou les matrices unipotentes d'ordre deux correspondantes) s'appellent traditionnellement les multiplicateurs de Stokes de l'équation $E(a;c;t)$ (en $t=\infty$) correspondant respectivement à la direction $d=\pi$ et à la direction $d=0$. En général, elles sont toutes différentes de zéro. Le phénomène de Stokes correspond à la non-sommabilité (au sens Borel-Laplace) des solutions formelles $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ dans ces directions respectives, que l'on appelle directions singulières. Le raisonnement précédent donne ainsi une méthode pour calculer les multiplicateurs de Stokes.

1.5. Cas logarithmiques –

Nous donnons pour terminer cette partie quelques indications sur les cas logarithmiques. Lorsque le paramètre b tend vers l'infini suivant une direction non parallèle à l'axe horizontal, l'équation $E(a,b;c;x)$ ne peut pas avoir de singularité régulière de type logarithmique aux points $x=1$ et $x=\infty$ (*cf* [Go]). Pour compléter, il reste donc à traiter le cas où l'origine est une singularité de type logarithmique, ce qui n'a lieu que si l'on a $c\in\mathbf{Z}$. Supposons par exemple que $c=2+m$, avec $m\in\mathbf{N}$ (le cas $c\in\mathbf{Z}\cap]-\infty,1]$ est similaire). Nous conservons les solutions renormalisées w_j^b, $j=3$, 4, 5, 6. On vérifie que les fonctions w_1^*, w_2^*:

$$w_1^*(x)={}_2F_1(a,b;m+2;x), \qquad w_2^*(x)=\log x\,{}_2F_1(a,b;m+2;x)+R(x),$$

où $R(x)$ est une fonction holomorphe convenable, pour $|x|<1$, forment un système fondamental de solutions de $E(a,b;c;x)$ à l'origine $x=0$. On utilise ensuite, à la place de N_0, la renormalisation N_0^* définie par:

$$N_0^*=\begin{pmatrix}1 & \log b\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On introduit les solutions renormalisées $w_1^{*b}(t)$, $w_2^{*b}(t)$ pour l'équation $E(a,b;c;t/b)$. On peut alors reprendre le raisonnement fait précédemment pour les cas génériques.

2. Bases mixtes et modèle "infinitésimal"

Considérons les formules de connexion (1.4.5) et (1.4.6). On observe qu'aucun couple de coefficients ne converge simultanément si l'on fait l'hypothèse que b tende vers l'infini sur une demi-droite parallèle à l'axe réel.

Ceci implique que, sous cette hypothèse, les fonctions w_j^b $(3 \leq j \leq 6)$ ne convergent pas en même temps. C'est pour remédier à cette non-convergence simultanée que l'on va introduire la notion de bases mixtes. Les limites (suivant une suite bien choisie) d'opérateurs de monodromie convenables calculés dans ces bases redonnent, comme nous allons le voir, les multiplicateurs de Stokes. On trouvera à la fin de l'article une explication heuristique de ce résultat utilisant un modèle géométrique "infinitésimal" dû à Martinet et Ramis.

2.1. Bases mixtes –

Soient w_j^b $(3 \leq j \leq 6)$ des fonctions définies par (0.2.2). On appelera

$$\Pi_+^b(t) = (w_3^b(t), w_6^b(t)), \qquad \Pi_-^b(t) = (w_5^b(t), w_4^b(t)) \tag{2.1.1}$$

bases mixtes (renormalisées) positive et négative respectivement.

On va procéder au calcul des multiplicateurs de Stokes de $E(a;c;t)$ à l'aide des bases $\Pi_\pm^b(t)$. Soient T_b et T_∞ des lacets de base un point fixé P $(P \neq 0,\ P \neq b)$ et entourant une fois positivement les points $t = b$ et ∞ respectivement. Ces lacets opèrent sur les bases mixtes renormalisées via le prolongement analytique. Cette opération définit, pour chaque lacet donné et chaque base considérée, une matrice carrée de monodromie $[T_{i+}]$ comme suit: pour $\nu = b$ ou ∞,

$$T_\nu :\ \Pi_+^b \longmapsto \Pi_+^b[T_{\nu+}], \qquad \Pi_-^b \longmapsto \Pi_-^b[T_{\nu-}].$$

Par un calcul direct, on vérifie que

$$[T_{b+}] = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\pi i\Gamma(1+b-a)b^{2a-c}}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)\Gamma(1-c+a+b)} \\ 0 & e^{2\pi i(c-a-b)} \end{pmatrix},$$

$$[T_{\infty+}] = \begin{pmatrix} e^{2\pi i a} & 0 \\ -\frac{2\pi i b^{c-2a}\Gamma(a+b+1-c)e^{\pi i c}}{\Gamma(a)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1-a+b)} & e^{2\pi i b} \end{pmatrix},$$

$$[T_{b-}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2\pi i b^{c-2a}\Gamma(1+a-b)e^{2\pi i(c-a-b)}}{\Gamma(a)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+c-a-b)} & e^{2\pi i(c-a-b)} \end{pmatrix},$$

$$[T_{\infty-}] = \begin{pmatrix} e^{2\pi i a} & -\frac{2\pi i\Gamma(1+c-a-b)b^{2a-c}e^{\pi i(-c+2a+2b)}}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)\Gamma(1+a-b)} \\ 0 & e^{2\pi i b} \end{pmatrix}.$$

On est alors en position d'énoncer les résultats suivants.

PROPOSITION. *Soit b_0 un nombre complexe quelconque. 1) Pour $b \in b_0 + \mathbf{N}$ (la demi-droite discrète issue du point b_0 et parallèle à l'axe réel et positif), et avec la convention* $\arg(b - b_0) = 0$, *on a:*

$$\lim_{b\to\infty}[T_{b+}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(c-a-b_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\pi i}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.1.2}$$

$$\lim_{b\to\infty}[T_{\infty+}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2\pi i e^{\pi i(c-2a)}}{\Gamma(c)\Gamma(1+a-c)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\pi i a} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i b_0} \end{pmatrix}; \tag{2.1.3}$$

2) Pour $b \in b_0 - \mathbf{N}$ avec $\arg(b - b_0) = \pi$, *on a:*

$$\lim_{b\to-\infty}[T_{b-}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(c-a-b_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2\pi i e^{\pi i(c-2a)}}{\Gamma(c)\Gamma(1+a-c)} & 1 \end{pmatrix}; \tag{2.1.4}$$

3) Pour $b \in b_0 - \mathbf{N}$ avec $\arg(b - b_0) = -\pi$, *on a:*

$$\lim_{b\to-\infty}[T_{\infty-}] = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\pi i}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\pi i a} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i b_0} \end{pmatrix}. \tag{2.1.5}$$

En conclusion, les multiplicateurs de Stokes peuvent s'obtenir à la limite (suivant une suite) à partir d'un couple d'opérateurs de monodromie $[T_{b+}]$ *et* $[T_{\infty+}]$ *(ou* $[T_{b-}]$ *et* $[T_{\infty-}]$*).*

2.2. Une description "infinitésimale" –

On donne maintenant une description "heuristique" (qui pourrait être rendue rigoureuse dans le cadre de [Ra2]...) des résultats (2.1.2–5), dans un langage géométrique selon le modèle "infinitésimal" de [MR]. On considère en premier lieu le cas où b, donc b_0, est un entier positif. Les formules (2.1.2–3) deviennent :

$$[T_{b+}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(c-a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\pi i}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$[T_{\infty-}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2\pi i e^{\pi i(c-2a)}}{\Gamma(c)\Gamma(1+a-c)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\pi i a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on peut décomposer la monodromie formelle à l'infini pour $E(a; c; t)$ comme suit:

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i a} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(c-a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(c-a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\pi i a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette formule peut être interprétée comme la décomposition de l'action d'un lacet de monodromie dessiné très près de l'origine dans le halo analytique de l'origine (au sens de [MR]) en l'action de deux tels lacets autour de l'éclatement de l'origine en deux points (très...) infiniment voisins. (Les couples $(t^{-a}, 1)$ et $(1, t^{a-c})$ produisent les monodromies correspondantes.)

D'après la théorie de Cauchy sauvage (*cf* [Ra2]), les solutions formelles $\widetilde{U}(t)$ et $\widetilde{V}(t)$ donnent naissance à de vraies solutions sur le halo analytique de l'origine. Ces solutions sont ramifiées en deux points de ce halo. Compte tenu de l'éclatement de 0 introduit au préalable, on obtient ainsi quatre points de ramification infiniment voisins de l'origine. On est alors dans une situation à quatre points singuliers réguliers. On peut alors décomposer, du point de vue homotopique, un lacet autour du halo analytique en deux lacets entourant chacun respectivement deux points de ramification (l'un provenant de l'éclatement de zéro, l'autre d'une singularité de la somme des solutions formelles sur le halo analytique). On obtient ainsi une interprétation géométrique des formules (2.1.2–3) dans le cas envisagé ($b \in \mathbf{N}^+$). Si b est un entier négatif, les matrices $[T_{b-}]$ et $[T_{\infty-}]$ seront obtenues de manière analogue.

Dans le cas général, on peut exprimer, par exemple, les formules (2.1.2–3) par les égalités matricielles

$$[T_{b+}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i b_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(c-a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\pi i}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$[T_{\infty-}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2\pi i e^{\pi i(c-2a)}}{\Gamma(c)\Gamma(1+a-c)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\pi i a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i b_0} \end{pmatrix}.$$

Compte tenu de l'interprétation géométrique précédente, l'apparition des constantes $e^{\pm 2\pi b_0}$ semble quelque peu inattendue. Elle est en fait reliée à la notion de tore exponentiel (qui apparait, suivant J. P. Ramis, dans le calcul du groupe de Galois différentiel), et plus précisèment à une interprétation monodromique de ce tore exponentiel. Comme J.-P. Ramis l'a prévu au début de son article [Ra1], la présence de ces constantes "aléatoires" correspond à la différence entre les deux parties de cet article au niveau de l'approche utilisée.

Nota. Les résultats présentés dans cet article sont extraits de la thèse de doctorat [Zh]. Son auteur tient à remercier vivement son directeur de thèse, Monsieur le Professeur Jean-Pierre Ramis, pour son encouragement permanent et sa patience pour faire partager sa vaste culture mathématique.

References

[Bi] Birkhoff, G. D., Singular points of ordinary linear differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. **10** (1909), 436–470.

[Du] Duval, A., Biconfluence et groupe de Galois, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **38**, 2 (1991), 211–223.

[Ga] Garnier, R., Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires, J. Math. Pures et Appl. 8e série **2** (1919), 99–198.

[Go] Goursat, E., *Leçons sur les séries hypergéométriques I, Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss*, Hermann, Paris, 1936.

[Ha] Hardy, G. H., *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford, 1949.

[IKSY] Iwasaki, K., Kimura, H., Shimomura, S. et M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé: A Modern Theory of Special Functions*, Aspects of Mathematics, Vol. E16, Vieweg, 1991.

[Kn] Knopp, K., Über das Eulersche Summierungsverfahren, Math. Zeits. **15** (1922), 226–253.

[Lu] Luke, Y. L., *The Special Functions And Their Approximations*, Vol. I, Academic Press, New York & London, 1969.

[MR] Martinet, J. et J.-P. Ramis, Théorie de Galois différentielle et Resommation, dans le livre, *Computer Algebra and Differential Equations*, E. Tournier Ed., Academic Press (1989), 117–214.

[Ra1] Ramis, J.-P., Confluence et Résurgence, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **36**, 3 (1989), 703–716.

[Ra2] Ramis, J.-P., Les derniers travaux de Jean Martinet, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **42**, 1-2 (1992), 15–47.

[Zh] Zhang, C., Quelques études en théorie des équations fonctionnelles et en analyse combinatoire, Thèse de doctorat de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, Prépublication de l'IRMA, Strasbourg, 1994/004.

(Received February 28, 1995)

Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
France

Present address
Département de Mathématiques

Pôle Sciences et Technologie
Avenue Marillac
17042 La Rochelle Cedex 1
France