

Groupes fondamentales associés aux feuilletages de codimension un mesures

By Paulo GUSMÃO(1)

Résumé. On considère sur les variétés orientables fermées M^n , $n \geq 3$, deux types de feuilletages : les feuilletages de codimension un mesurés, non transversalement orientables, à singularités de Morse, et les feuilletages transversalement orientables presque sans holonomie. Associé à ces feuilletages (en fait à leur pseudogroupe d'holonomie) on étudie deux groupes : le premier c'est le groupe fondamental $\pi_1(B\Gamma)$ du classifiant de Haefliger et le deuxième c'est le quotient de $\pi_1(M)$ par le sous-groupe distingué \mathcal{L}' engendré par les classes d'homotopie libre des lacets contenus dans des feuilles. On détermine les deux groupes dans les deux cas et on montre, dans le cas des feuilletages mesurés ci-dessus, que la connaissance de ces groupes nous permet d'obtenir des propriétés géométriques du feuilletage.

Introduction

De façon générale, si on se donne une variété M^n munie d'un feuilletage \mathcal{F} , on peut associer au pseudogroupe d'holonomie Γ de \mathcal{F} son espace classifiant $B\Gamma$ introduit par Haefliger (cf. [Hae 2]). Le groupe fondamental de $B\Gamma$ est susceptible d'une définition directe (cf. [Salem]) : il est le quotient de $\pi_1(M)$ par le sous-groupe distingué \mathcal{L} engendré par les classes d'homotopie libre des lacets contenus dans des feuilles et à holonomie triviale.

Dans [Lev 3], G. Levitt a étudié le groupe fondamental de $B\Gamma$ pour les variétés M^n fermées orientables, ($n \geq 3$) munies d'un feuilletage de codi-

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20F38, 57R30, 53C12.

Key words: Measured foliations, almost without holonomy foliation, graph of groups.

Codes matière AMS : Mots-clefs : Feuilletage mesuré, feuilletage presque sans holonomie, graphe de groupes.

(1) Ce travail a été partialement financé par la CAPES Brésil.

mension 1 transversalement orientable \mathcal{F} , mesuré à singularités de Morse, c'est à dire, \mathcal{F} est défini par une 1-forme fermée singulière ω où les singularités sont de type Morse. Avec ces hypothèses il montre que $\pi_1(B\Gamma)$ est toujours un produit libre de groupes abéliens libres. De plus, il associe à ce groupe certains entiers qui permettent d'obtenir des propriétés géométriques du feuilletage.

Désignons par \mathcal{L}' le sous-groupe distingué de $\pi_1(M)$ engendré par les classes d'homotopie libre des lacets contenus dans des feuilles.

Dans ce travail, on étudie $\pi_1(B\Gamma)$ et $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$ dans les deux cas suivants : 1) les feuilletages de codimension 1 mesurés, non transversalement orientables, à singularités de Morse sur les variétés orientables fermées de dimension $n \geq 3$, 2) les feuilletages presque sans holonomie sur les variétés fermées.

La partie I est consacré aux feuilletages mesurés (cas 1 ci-dessus). Premièrement on détermine les deux groupes en question, on montre que $\pi_1(B\Gamma)$ est un produit libre de groupes où les facteurs sont soit des groupes abéliens libres, soit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, soit des groupes diédraux, c'est à dire, des groupes isomorphes à $\mathbb{Z}^a \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Par contre $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$ est un produit libre de groupes abéliens libres. La connaissance de ces groupes nous permet en particulier de déterminer le nombre de feuilles non orientables du feuilletage (section I.B). Dans la section I.C on définit un invariant d qu'on relie aux singularités coniques de \mathcal{F} .

Dans la deuxième partie on détermine les deux groupes $\pi_1(B\Gamma)$ et $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$ pour les feuilletages presque sans holonomie ; on montre que le premier groupe est isomorphe au groupe fondamental d'un certain graphe de groupes où chaque groupe qui le constitue est un groupe abélien. Par contre le deuxième est isomorphe à un produit libre de groupes abéliens (pas forcément libres).

0. Préliminaires

0.A. 1-formes fermées de Morse

Soit ω une 1-forme fermée sur une variété compacte orientable sans bord M^n de dimension $n \geq 3$. L'homomorphisme de $\pi_1(M)$ dans \mathbb{R} obtenu en intégrant ω le long des lacets sera noté $[\omega]$. Deux formes définissent le même homomorphisme si et seulement si leur différence est exacte, et nous identifierons l'homomorphisme $[\omega]$ à la classe de cohomologie de De Rham

$[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})$. D'autre part nous confondrons souvent un lacet et sa classe dans $\pi_1(M)$.

L'image de $[\omega]$ est le *groupe de périodes* $P(\omega) \subset \mathbb{R}$. Ce groupe est de type fini, donc isomorphe à un $\mathbb{Z}^{r(\omega)}$; $r(\omega)$ s'appelle le *rang* de ω . Le rang est nul pour les formes exactes, égale à 1 si $P(\omega)$ est infini cyclique, et ≥ 2 dès que ω possède deux périodes rationnellement indépendantes ($P(\omega)$ est alors dense dans \mathbb{R}).

Une *primitive locale* de ω est une fonction f à valeurs réelles, définie sur un ouvert de M et vérifiant $df = \omega$. Sur tout ouvert simplement connexe ω admet une primitive locale, unique à une constante additive près.

Les *singularités* de ω sont les points x où $\omega_x = 0$; ils correspondent aux points critiques des primitives locales. L'ensemble des singularités de ω est noté $Sing\omega$, et son complémentaire M^* .

DÉFINITION 0.A.1. Une forme ω est de Morse si tout point singulier x de ω est un point critique non dégénéré pour les primitives locales de ω .

Les singularités d'une forme de Morse sont en nombre fini et ont un *indice* compris entre 0 et n . Une singularité d'indice 0 ou n est un *centre* ; une singularité d'indice 1 ou $n-1$ sera dite *conique* ; il en part deux *bouts singuliers* (demi-cônes), voir Fig. 1.

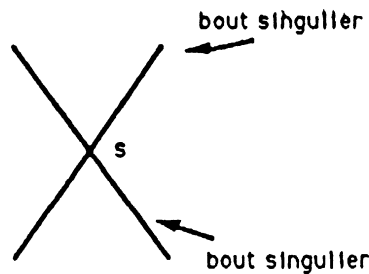


Fig. 1

Sur $M^* = M - Sing\omega$ la forme ω est non singulière et définit un feuilletage de codimension 1, donné par les niveaux des primitives locales de ω .

La forme ω détermine une mesure transverse invariante du feuilletage, obtenue en associant à un intervalle (ou à une courbe fermée) transverse I sa longueur $|I| = |\int_I \omega|$. Le feuilletage possède également une orientation transverse, donnée par le sens de croissance des primitives locales. En particulier toute feuille compacte est transversalement orientée. Une *feuille de ω* sera par définition une feuille du feuilletage ci-dessus. L'*espace des feuilles* M^*/ω de ω est le quotient de M^* par la relation d'équivalence "être sur la même feuille".

Rappelons que, si $r(\omega) \leq 1$, alors toute feuille L de ω est fermée dans M^* , ou de façon équivalente que $L \cup \text{Sing}\omega$ est compacte. Une feuille L non compacte est *presque compacte* si $L \cup \text{Sing}\omega$ est compacte. Notons $N(\omega)$ l'union des feuilles L telles que $L \cup \text{Sing}\omega$ ne soit pas compacte.

On remarque que si ω est un 1-forme fermée de Morse et L est une feuille compacte (régulière), alors les feuilles voisines de L sont également compactes (le feuilletage est sans holonomie). On en déduit facilement que $N(\omega)$ est ouvert et possède un nombre fini de composantes connexes. On montre (cf. [A.L]) que si U est une composante connexe de $N(\omega)$, alors toute feuille de U est dense dans U .

Les composantes connexes de $N(\omega)$ seront appelées *composantes minimales* de ω . Noter que si U est une composante minimale de ω , $P(\omega|_U)$ est dense dans \mathbb{R} et que deux composante minimales sont égales ou disjointes. On note aussi que chaque feuille contenue dans la frontière d'une composante minimale U est presque compacte, en plus si ω n'a pas de liaison entre singularités d'indice 1 et $n-1$ (i.e. il n'existe pas de chemin $[s, s']$ tel que $]s, s'[$ soit contenu dans une feuille, où s est une singularité d'indice 1, et s' est une singularité d'indice $n-1$ (voir Fig. 2)), chaque telle feuille adhère d'un côté à U et de l'autre à un ouvert W formé des feuilles compactes feuilletées comme produits : feuille compacte \times intervalle ouvert. En particulier les adhérences des composantes minimales sont deux à deux disjointes.

Nous noterons $\mathcal{L}(\omega)$, ou simplement \mathcal{L} , le plus petit sous-groupe distingué de $\pi_1(M)$ contenant l'image de $\pi_1(L)$ pour toute feuille L . Nous aurons parfois à choisir un point base $x \in M$. Le sous-groupe $\mathcal{L} \subset \pi_1(M, x)$ est engendré par les lacets de la forme $c\gamma c^{-1}$, où c est un chemin d'origine x et γ est un lacet contenu dans une feuille. Puisque le feuilletage \mathcal{F} défini par ω est sans holonomie le quotient $\pi_1(M, x)/\mathcal{L}$ correspond exactement au groupe fondamental $\pi_1(B\Gamma)$ du espace classifiant $B\Gamma$ associé au pseu-

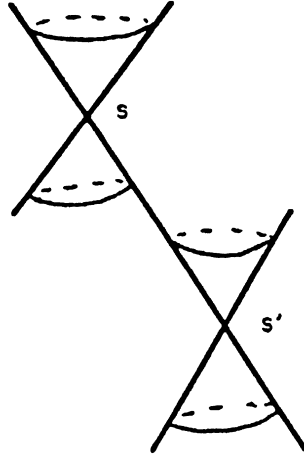


Fig. 2

dogroupe d'holonomie de \mathcal{F} .

Soit U une composante minimale, et θ la forme induite $\omega|_U$. D'après [Lev 3] nous avons l'équivalences suivantes :

a) Si un arc $\gamma \subset U$ est d'intégral nulle ($\int_\gamma \theta = 0$), ses extrémités sont sur la même feuille.

b) Il existe une courbe fermée C transverse à θ telle que, si x et y bordent sur C un arc I avec $\int_I \theta \in P(\theta)$, alors x et y sont sur la même feuille.

c) $\pi_1(U)/\mathcal{L}|_U \simeq P(\theta)$ donc isomorphe à $\mathbb{Z}^a, a \geq 2$.

Si ces conditions sont vérifiées, nous dirons que (U, θ) est une *composante minimale faiblement complète*. On notera qu'alors toute courbe transverse possède la propriété c), et que toute période de θ (sauf 0) peut être représentée par une courbe transverse.

Soit C une courbe transverse dans une composante faiblement complète (U, θ) . La forme non singulière induite sur C par θ définit sur C une mesure de Lebesgue ; en particulier, on peut parler de rotations sur C .

La condition b) ci-dessus signifie en fait que le pseudogroupe d'holonomie de θ sur C est précisément le pseudogroupe engendré par le groupe $P(\theta)$ agissant par rotations ; en d'autres termes, les intersections avec des feuilles de θ sont les orbites de l'action de $P(\theta)$.

Nous donnons maintenant deux résultats sans démonstration que nous aurons besoin dans les parties qui suivent. Le premier est concernant aux épimorphismes entre produits libres de groupes abéliens libres tandis que le deuxième c'est la détermination de $\pi_1(B\Gamma)$ pour les feuilletages définis par des 1-formes fermées de Morse sur les variétés fermées orientables de dimension supérieur ou égale à 3.

Nous dirons qu'un groupe, G de type fini est un *proligal*(PROduit LIBre de Groupes Abéliens Libres) s'il est isomorphe à un produit $\mathbb{Z}^{a_1} * \dots * \mathbb{Z}^{a_f}$, $a_1 \geq \dots \geq a_f \geq 1$. Un tel isomorphisme n'est pas unique, mais f et les a_i sont bien déterminés. Notons $f = f(G)$.

LEMME 0.A.1 ([Lev 3]). *Soit $\varphi : G \rightarrow G'$ un épimorphisme. On suppose que G et G' sont des proligals et que φ est injectif sur chaque facteur de G de rang ≥ 2 . Alors ou bien φ est un isomorphisme ou bien $f(G) > f(G')$.*

Dans [Lev 3] G. Levitt à montre le théorème suivant :

THEOREME 0.A.2. *Soit M^n une variété fermée orientable de dimension $n \geq 3$, et ω une 1-forme de Morse sur M . Alors $\pi_1(B\Gamma)$ est un produit libre de groupes abéliens libres. De plus les facteurs de rang ≥ 2 sont en bijection avec les groupes des périodes des composantes minimales faiblement complètes de ω .*

Ce travail est la parti la plus important de ma thèse faite à l'Université Paul Sabatier (Toulouse III). Je remerci mon directeur de recherche Gilbert Levitt par son aide e encouragement.

I. Feuilletages mesurés de Morse sur les variétés fermées

Ici M^n ($n \geq 3$) est une variété fermée orientable munie d'un feuilletage mesuré \mathcal{F} non transversalement orientable avec singularité de Morse, autrement dit, si $p : \overline{M} \rightarrow M$ est le revêtement d'orientation de $(M, \mathcal{F}^\natural)$, $p^*(\mathcal{F})$ est défini par une 1-forme fermée ω , de Morse.

Une *composante minimale* de \mathcal{F} est par définition un ouvert saturé de $M^* = M - \text{Sing}\omega$ où toutes les feuilles sont denses.

Une composante minimale U sera appelée complète si $\omega|_{\overline{U}}$ est faiblement complète (cf. *section 0.A*) où \overline{U} est une composante connexe du relevé de U dans \overline{M} . En particulier si $p^{-1}(U)$ possède deux composantes connexes, $\mathcal{F}|_U$

est défini par une 1-forme fermée faiblement complète. On dira aussi qu'une composante minimale complète U est *orientable* (respect. *nonorientable*) si $\mathcal{F}|_U$ est transversalement orientable (respect. non transversalement orientable).

Grace aux caractérisations des formes faiblement complètes on a l'équivalence suivante:

- 1) $\omega|_{\overline{U}}$ est minimale faiblement complète
- 2) Pour toute courbe fermée $C \subset U$ transverse à $\omega|_{\overline{U}}$, le pseudogroupe d'holonomie de $\omega|_{\overline{U}}$ restreint à $C, \Gamma|_C$, est un groupe de rotations (i.e, pour $y \in \Gamma(x) \Rightarrow Ry \in \Gamma(Rx)$ pour toute rotation R de C).

Maintenant soit U est une composante minimale complète non orientable avec pseudogroupe d'holonomie Γ et $\Gamma|_C$ sa restriction à une transversale fermée $C \subset U$. D'après la définition de composante minimale complète et de l'équivalence ci-dessus, on voit facilement que $\Gamma|_C$ est un pseudogroupe engendré par un groupe d'isométries de C (chaque élément de $\Gamma|_C$ est défini sur C tout entier).

Considerons $\mathcal{L} \subset \pi_1(M)$ le plus petit sous-groupe normal qui contient les lacets contenus dans des feuilles et d'holonomie triviale. On rappelle que si $U \subset M$ est une composante minimale complète orientable, alors $\pi_1(U)/\mathcal{L}|_U \simeq P(\omega_U) \simeq \mathbb{Z}^a$ où ω_U est la 1-forme qui définit $\mathcal{F}|_U$ (cf. section 0.A).

Pour une composante minimale complète non orientable U nous allons montrer que $\pi_1(U)/\mathcal{L}|_U \simeq \mathbb{Z}^a \rtimes Z/2Z$ avec $\mathbb{Z}^a \simeq P(\omega|_{\overline{U}})$. Ce qu'il y a derrière cela c'est le fait bien connu que si un pseudogroupe Γ d'homéomorphisme locaux d'un espace V est engendré par l'action d'un groupe G qui agit sur V de façon quasi analytique, alors $\pi_1(B\Gamma) = G$. Dans notre cas G n'est rien d'autre qu'un groupe d'isométries.

Notons premièrement que si $h \in \text{Aut}(\overline{M}, p) \simeq Z/2Z$ est distinct de l'identité et γ un chemin dans \overline{M} alors, $\int_\gamma \omega = -\int_\gamma h^*\omega$. Ainsi, pour $x, h(x) \in \overline{U}$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{U}$ un chemin les reliant, la fonction $\beta(t) = \int_{\gamma(t)}^{h(\gamma(t))} \omega$ est continue et vaut disons, θ en zéro et $-\theta$ en un. Si $\theta = 0$ alors, x et $h(x)$ sont dans la même feuille \overline{L} de $p^*\mathcal{F}|_{\overline{U}}$ (\overline{U} est une composante minimale faiblement complète), donc $L = p(\overline{L})$ est non orientable. Si $\theta \neq 0$ il existe $t_0 \in (0, 1)$ tel que $\beta(t_0) = 0$ ce qui montre que $\gamma(t_0)$ et $h(\gamma(t_0))$ sont dans la même feuille donc, pour une composante minimale complète non orientable, l'ensemble des feuilles non orientables est non vide.

Considérons maintenant les homomorphismes $\varphi : \pi_1(\overline{U})/\overline{\mathcal{L}}|_{\overline{U}} \rightarrow \pi_1(U)/\mathcal{L}|_U$ induit par $p|_{\overline{U}} : \overline{U} \rightarrow U$ et $\psi : \pi_1(U)/\mathcal{L}|_U \rightarrow Z/2Z$ définis de la façon suivante : $\psi([\alpha]) = \overline{0}$ si α préserve l'orientation transverse du feuilletage et vaut à $\overline{1}$ sinon. On voit facilement que la suite

$$0 \longrightarrow \pi_1(\overline{U})/\overline{\mathcal{L}}|_{\overline{U}} \xrightarrow{\varphi} \pi_1(U)/\mathcal{L}|_U \xrightarrow{\psi} Z/2Z \longrightarrow 0$$

est exacte. Il nous reste à montrer qu'elle est scindée : il suffit de trouver une section $s : Z/2Z \rightarrow \pi_1(U)/\mathcal{L}|_U$. Considérons une feuille non orientable L dans U (qui existe d'après ce qui précède), α un lacet contenu dans L dont l'holonomie est d'ordre deux et définissons $s(\overline{1}) = [\alpha]$. Noton aussi que l'action de $Z/2Z \simeq \text{Aut}(\overline{U}, p)$ sur \mathbb{Z}^a envoie $\theta \in \mathbb{Z}^a$ sur $-\theta$.

Considérons maintenant $\mathcal{L}' \subset \pi_1(M)$ le plus petit sous-groupe normal qui contient $\pi_1(L)$ pour toute feuille L de \mathcal{F} . Si U est une composante minimale complète orientable alors $\mathcal{L}'|_U = \mathcal{L}|_U$ (car $\mathcal{F}|_U$ est sans holonomie) donc, $\pi_1(U)/\mathcal{L}'|_U \simeq Z^a \simeq P(\omega_U)$.

Pour étudier le cas où U est une composante minimale complète non orientable, nous remarquons d'abord qu'on peut donner une présentation de $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$ à partir de générateurs d'un pseudogroupe Γ . Nous considérons le cas où Γ est le pseudogroupe d'holonomie défini sur une variété connexe et simplement connexe V (par exemple $V = \mathbb{R}$ immergé dans M) transverse à toutes les feuilles de \mathcal{F} . Dans ce cas $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$ a la présentation suivante : Soit $\gamma_i : U_i \rightarrow V_i$ ($i \in I$) un système de générateurs de Γ , où chaque γ_i est un homéomorphisme entre ouverts *connexes* de V . On obtient alors une présentation de $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$ en prenant pour générateurs des lettres a_i ($i \in I$), et pour relations les mots en a_i et a_i^{-1} tels que l'élément correspondant de Γ (obtenu en composant les γ_i ou γ_i^{-1}) soit défini sur un ouvert non vide de V et fixe un point. On remarque aussi qu'une présentation de $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$ est obtenue en remplaçant ci-dessus "*soit défini sur un ouvert non vide et fixe un point*" par "*soit défini et égal à l'identité sur un ouvert non vide de V* ". Notons que deux pseudogroupes équivalents (cf. [Salem]) ont les respectives groupes présentés ci-dessus isomorphes.

Revenons au cas qui nous intéresse c'est-à-dire $\pi_1(U)/\mathcal{L}'|_U$ où U est une composante minimale complète non orientable. Pour une courbe fermée C transverse, $\Gamma|_C$ est un pseudogroupe d'isométries équivalent au pseudogroupe Γ' sur \mathbb{R} obtenu en relevant ces isométries et en ajoutant la translation de l'unité.

Maintenant, d'après la présentation donnée ci-dessus, il est facile de voir que $\pi_1(U)/\mathcal{L}'|_U$ est trivial : en effet, puisque Γ' est un groupe d'isométries, chaque symétrie $s \in \Gamma'$ représente la classe triviale dans le groupe $G \simeq \pi_1(U)/\mathcal{L}'|_U$ (présenté comme ci-dessus) ; de plus pour toute translation $r \in \Gamma'$, la classe $[rs] = [r]$, donc $[r]$ est trivial car rs fixe un point.

I.A. Détermination de $\pi_1(M)/\mathcal{L}$ et $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$

D'après ce que l'on vient de voir, si $(U, \mathcal{F}|_U)$ est une composante minimale complète, alors $\pi_1(U)/\mathcal{L}|_U$ (resp. $\pi_1(U)/\mathcal{L}'|_U$) est, soit isomorphe à \mathbb{Z}^a ($a \geq 2$) (resp. \mathbb{Z}^a , $a \geq 2$), soit isomorphe à $\mathbb{Z}^a \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (resp. $\{1\}$) selon que cette composante est transversalement orientable ou pas.

Dans le premier cas, $\mathcal{F}|_U$ est défini par une 1-forme fermée ω et $\mathbb{Z}^a \simeq P(\omega)$ groupe des périodes de ω . Dans le deuxième cas, \mathbb{Z}^a est isomorphe au groupe des périodes de la forme $\bar{\omega}|_{\bar{U}}$ où $\bar{\omega}$ définit $p^*\mathcal{F}$ et $p : \bar{M} \rightarrow M$ est le revêtement d'orientation de $(M, \mathcal{F}^{\text{th}})$ et \bar{U} le relevé de U .

On va démontrer les théorèmes suivants:

THÉORÈME I.1. *Avec les hypothèses ci-dessus, $\pi_1(M)/\mathcal{L} \simeq F * \mathbb{Z}^{a_1} * \dots * \mathbb{Z}^{a_p} * (\mathbb{Z}^{a_{p+1}} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \dots * (\mathbb{Z}^{a_m} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $a_i \geq 2$ et F est un groupe libre. De plus, on a une correspondance 1-1 entre les facteurs \mathbb{Z}^{a_i} et les composantes minimales complètes orientables et entre les facteurs $\mathbb{Z}^{a_j} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et celles qui ne sont pas orientables.*

THÉORÈME I.2. *Si (M, \mathcal{F}) est comme ci-dessus, alors $\pi_1(M)/\mathcal{L}' \simeq F * \mathbb{Z}^{a_1} * \dots * \mathbb{Z}^{a_p}$ avec $a_i \geq 2$ et de sorte que les facteurs \mathbb{Z}^{a_i} sont en correspondance 1-1 avec les composantes minimales complètes orientables et, F est un groupe libre.*

COROLLAIRE I.3. *Si \mathcal{F} est à holonomie triviale, alors $\pi_1(M)/\mathcal{L} \simeq F * \mathbb{Z}^{a_1} * \dots * \mathbb{Z}^{a_p}$.*

En effet, dans ce cas $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.

REMARQUES. Soit $p : M_{\mathcal{L}} \rightarrow M$ le revêtement associé à \mathcal{L} , $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = p^*\mathcal{F}$ et $M_{\mathcal{L}}^* = M_{\mathcal{L}} - \text{sing}\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$. Il est facile de voir que $\bar{p} : \bar{M} \rightarrow M$, revêtement d'orientation de $(M, \mathcal{F}^{\text{th}})$ est un revêtement intermédiaire de $(M_{\mathcal{L}}, p)$. En particulier, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ est défini par une 1-forme fermée $\omega_{\mathcal{L}}$ de Morse. En fait $\omega_{\mathcal{L}}$ est exacte, i.e $\omega_{\mathcal{L}} = df$ où $f : M_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \int_{x_0}^x \omega_{\mathcal{L}}$, $x_0 \in M_{\mathcal{L}}$ un point base fixé. Maintenant puisque $\pi_1(M_{\mathcal{L}}) = \pi_1(M_{\mathcal{L}}^*)$ est engendré par les lacets contenus dans des feuilles, $(M_{\mathcal{L}}^*, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}^*)$ ne possède pas de transversale

fermée donc, toute feuille de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^*$ est fermée ce qui implique que l'espace de feuilles $M_{\mathcal{L}}^*/\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^*$ est une 1-variété (en général non séparée) en plus, puisque le morphisme $\varphi : \pi_1(M_{\mathcal{L}}^*) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui donne l'indice d'intersection d'un lacet avec une feuille est trivial, on voit que toute feuille sépare $M_{\mathcal{L}}^*$ en deux composantes connexes ce qui implique que $M_{\mathcal{L}}^*/\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^*$ est simplement connexe.

De la même façon, considérons $p : M_{\mathcal{L}'} \rightarrow M$ le revêtement associé à $\mathcal{L}', \mathcal{F}_{\mathcal{L}'} = p'^*(\mathcal{F})$ et notons $M_{\mathcal{L}'}^* = M_{\mathcal{L}'} - \text{sing}\mathcal{F}_{\mathcal{L}'}$. Il est clair que si L' est une feuille de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}'}^* = \mathcal{F}_{\mathcal{L}'} - \text{sing}\mathcal{F}_{\mathcal{L}'}$ alors, $p' |_{L'} : L' \rightarrow L = p'(L')$ est un homéomorphisme. Puisque $\pi_1(M_{\mathcal{L}'}) = \pi_1(M_{\mathcal{L}'})$ est engendré par les lacets contenus dans les feuilles, si $\mathcal{F}_{\mathcal{L}'}$ possède des feuilles compactes, alors toute feuille compacte orientable sépare $M_{\mathcal{L}'}^*$ en deux composantes connexes (rappelons que l'indice d'intersection d'un lacet transverse à une feuille fermée non orientable est défini comme le résidu modulo 2 du nombre m de points d'intersection).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.1. La démonstration sera faite en trois étapes : dans la première nous supposons que toutes les composantes minimales de \mathcal{F} sont complètes et que sur $(\overline{M}, \mathcal{F}_\omega)$ il n'existe pas de liaisons entre singularités d'indice 1 et $n-1$, donc ni sur $(M_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}})$. Cela va nous permettre d'associer à $(M_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}})$ un arbre T muni d'une action de $\pi_1(M)/\mathcal{L}$ sans inversion. Dans la deuxième étape on utilise la Théorie de Bass-Serre (cf. [Serre]) sur le graphe de groupes et groupe fondamental de graphe de groupes pour caractériser $\pi_1(M)/\mathcal{L} = G$.

Nous allons montrer que si $Y = G/T$ dénote le graphe quotient, et si $y \in \text{Aret}Y$ alors, le groupe G_y de stabilisateurs de $j(y)$, relevé de y dans T , est trivial, et que pour $p \in \text{Som}Y$, G_p est soit isomorphe à $\mathbb{Z}^{a_i} \simeq \pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i}$, soit à $\mathbb{Z}^{a_i} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i}$ soit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ selon que p représente une composante minimale complète U_i orientable, non orientable ou p représente une feuille compacte non orientable. Si p représente un centre ou la frontière d'un W_k adhérent uniquement à des ouverts de feuilles compactes, $G_p = \{1\}$. Ensuite d'après 5.4 Théorème 13 [Serre] $\pi_1(M)/\mathcal{L} \simeq F * (*G_p)$ où $F = \pi_1(Y)$ est un groupe libre ce qui nous permet de conclure.

Dans le cas général (étape 3) on perturbe \mathcal{F} au voisinage des singularités coniques de façon à se ramener à la situation précédente sans changer $\pi_1(M)/\mathcal{L}$.

étape 1 - l'arbre T . Supposons d'abord que sur (M, \mathcal{F}) , toutes les composantes minimales sont complètes et que sur $(\overline{M}, \mathcal{F}_\omega)$ il n'existe pas

de liaisons entre singularités d'indices 1 et $n-1$, donc ni sur $(M_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}})$. Cette dernière hypothèse, d'après [section 0.A], implique que les feuilles presque compactes dans la frontière d'une composante minimale de (M, \mathcal{F}) adhèrent d'un côté à la composante elle-même et, de l'autre côté à un ouvert des feuilles compactes W_k qui est soit feuilleté comme produit i.e $L \times (0, 1)$, soit possède une seule feuille non orientable selon que $\mathcal{F}|_{W_k}$ est transversalement orientable ou non. En particulier l'adhérence des composantes minimales U_1, \dots, U_p de (M, \mathcal{F}) sont deux à deux disjointes.

On remarque aussi que puisque $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ est transversalement orientable et puisque pour toute feuille $L' \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ $p|_{L'} : L' \rightarrow L = p(L')$ est soit 1-1, soit 2-1, les composantes connexes du relevé d'un ouvert de feuilles compactes W_k sont aussi feuilletées comme produit et, si pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$, $p^{-1}(U_i) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_i^n$, la frontière des U_i^n est aussi constituée de feuilles presque compactes qui adhèrent d'un côté à U_i^n et de l'autre côté à des ouverts de feuilles compactes feuilletés comme produit.

Considérons sur l'ensemble des feuilles non compactes de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ la relation d'équivalence suivante : $L \sim L'$ si, L et L' appartiennent à $U_i^n \cup \partial U_i^n$ pour i, n donnés, ou L et L' appartiennent à une même composante connexe de la frontière dans $M_{\mathcal{L}}$, d'un ouvert de feuilles compactes. Nous allons maintenant associer à $(M_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}})$ un arbre T de la façon suivante : les sommets sont d'une part les centres, les feuilles compactes qui se projettent sur une feuille non orientable et d'autre part les classes données par la relation ci-dessus. Les arêtes sont les paquets de feuilles compactes orientés par l'orientation transverse du feuilletage et attachés aux sommets de façon évidente. T est un arbre (car dans $M_{\mathcal{L}}$ toute feuille sépare) muni d'une action de $\pi_1(M)/\mathcal{L}$ sans inversion.

étape 2 - les stabilisateurs. On remarque d'abord que si U_i est une composante minimale complète, alors $\pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i}$ s'injecte dans $\pi_1(M)/\mathcal{L}$: en effet, si $\mathcal{F}|_{U_i}$ est transversalement orientable, puisque $\pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i} \simeq P(\omega|_{\overline{U_i}})$ où $\overline{U_i}$ est un relevé de U_i dans \overline{M} , tout lacet γ dans U_i représentant une classe non triviale dans $\pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i}$ se relève dans \overline{M} en un lacet $\overline{\gamma}$ avec $\int_{\overline{\gamma}} \omega \neq 0$ ce qui implique qu'un tel élément γ ne peut pas être zéro dans $\pi_1(M)/\mathcal{L}$. Maintenant si $\mathcal{F}|_{U_i}$ n'est pas transversalement orientable et $[\gamma] \neq 0$ dans $\pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i}$ mais est zéro dans $\pi_1(M)/\mathcal{L}$ alors γ se relève en un lacet $\overline{\gamma}$ dans \overline{M} avec $\int_{\overline{\gamma}} \omega = 0$. Cela est une contradiction avec le fait que $\pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i} \simeq P(\omega|_{\overline{U_i}}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où l'isomorphisme associe une

classe $[\alpha] \in \pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i}$ d'un lacet qui préserve l'orientation transverse du feuilletage à $[\bar{\alpha}] = \int_{\bar{\alpha}} \omega \in P(\omega |_{\overline{U_i}})$. On verra ensuite que si $g \in \pi_1(M)/\mathcal{L}$ fixe un sommet $j(p)$ ou p représente une feuille compacte L non orientable, alors g peut être représenté par un lacet γ contenu dans L à holonomie d'ordre deux donc non trivial dans $\pi_1(M)/\mathcal{L}$.

Cherchons maintenant les stabilisateurs des sommets et des arêtes de T . Soient U_i une composante minimale de (M, \mathcal{F}) telle que $\mathcal{F}|_{U_i}$ est transversalement orientable, $p_{i,k}$ un sommet de T qui correspond à une composante connexe U_i^k du relevé de U_i dans $M_{\mathcal{L}}$ et, $G_{i,k}$ le groupe des stabilisateurs de $p_{i,k}$. Puisque $\pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i}$ s'injecte dans $\pi_1(M)/\mathcal{L}$ et que tout élément dans $\pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i}$ peut être représenté par un lacet dans U_i , $\pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i} \subset G_{i,k}$. Maintenant, si $g \in G_{i,k}$ et $x \in U_i^k$, alors x et $g(x)$ appartiennent à U_i^k , ainsi si λ est un chemin dans U_i^k qui joint x à $g(x)$, $p(\lambda)$ représente g ce qui montre que $G_{i,k} = \pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i} \simeq \mathbb{Z}^{a_i}$.

De la même façon on obtient que $G_{i,k} = \pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i} \simeq \mathbb{Z}^{a_i} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans le cas où $\mathcal{F}|_{U_i}$ est non transversalement orientable. Si maintenant s_j est un sommet de T qui correspond à une feuille compacte L' dans $M_{\mathcal{L}}$ qui est le relevé d'une feuille non orientable L , il est clair que $G_{s_j} = \text{Aut}(L', p|_{L'})$ et donc est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si G_p est le stabilisateur d'un centre, évidemment $G_p = \{1\}$. Pour voir que les stabilisateurs des arêtes sont des groupes triviaux, il suffit de remarquer que chaque arête correspond à un ouvert de feuilles compactes feuilleté comme produit et homéomorphe à son image par l'application de revêtement.

Soit maintenant p un sommet de T qui représente une composante connexe de la frontière d'un ouvert de feuilles compactes qui n'adhère qu'à des ouverts de feuilles compactes ; p est une union de feuilles presque compactes et des singularités de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$.

Pour montrer que $G_p = \{1\}$, on montre que chaque élément de G_p fixe toutes les arêtes attachés à p . En effet, si ce n'est pas le cas, alors il existe deux ouverts W_1, W_2 de feuilles compactes dans $M_{\mathcal{L}}$ avec p comme frontière commune, qui se projettent sur un même ouvert W dans M ; il existe aussi $x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$ et un chemin λ qui joint x_1 et x_2 avec $\lambda \subset \overline{W_1} \cup \overline{W_2}$ tel que $p(\lambda) \subset \overline{W}$ soit un lacet. Or puisque W est feuilleté comme produit, on a $p(\lambda) \in \mathcal{L}$, contradiction. Pour conclure, on applique le théorème de structure (cf. 5.4 [Serre]) au graphe de groupes ainsi obtenu.

étape 3 - on approche \mathcal{F} . Pour chaque singularité conique s , il existe

un voisinage U_s de s tel que $\mathcal{F}|_{U_s}$ soit défini par une 1-forme de Morse exacte df_s et tel que s soit un point critique de f_s d'indice $n-1$. Pour chaque s choisissons une fonction "bosse" $g_s : M \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ , égale à 1 sur un petit voisinage $U'_s \subset U_s$ de s et à zéro en dehors d'un voisinage un peu plus grand.

Pour $\epsilon > 0$ perturbons \mathcal{F} en \mathcal{F}_ϵ en approchant chaque df_s par $df_s(\epsilon) = df_s - \epsilon dg_s$. Ce passage a pour effet dans $(\overline{M}, \mathcal{F}_\omega)$ d'approcher ω par $\omega(\epsilon) = \omega - \sum_{s_{n-1}} \epsilon dg_{s_{n-1}} + \sum_{s_1} \epsilon dg_{s_1}$ ou s_{n-1} (resp. s_1) désigne les singularités d'indices $n-1$ (resp. 1), relevées de s et les $g_{s_{n-1}} = g_{s_1} : \overline{M} \rightarrow [0, 1]$ sont tels que $g_{s_{n-1}} = g_{s_1} = g_s p$.

Notons que pour ϵ petit, \mathcal{F} et \mathcal{F}_ϵ ont les mêmes singularités et que le passage de \mathcal{F} à \mathcal{F}_ϵ se fait en "coupant" les feuilles au voisinage des singularités coniques (cf. Fig. 3). En particulier, \mathcal{L} est une union croissante de $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\epsilon) = \mathcal{L}_\epsilon$ quand ϵ décroît vers 0. On sait (d'après [Lev 2 pp. 651-652]) que pour ϵ assez petit, cette perturbation a pour effet dans $(\overline{M}, \mathcal{F}_\omega)$ de remplacer les composantes minimales non faiblement complètes par des feuilles compactes. Par contre (cf. [Lev 2 I.7.3 et II]) celles qui sont faiblement complètes subsistent avec le même groupe de périodes.

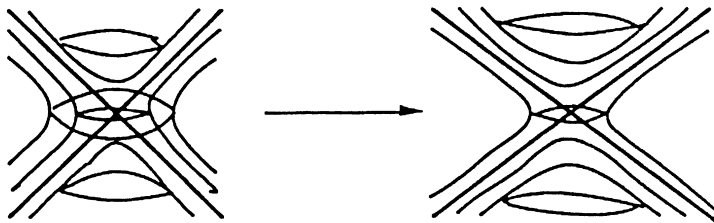


Fig. 3

Choisissons une suite ϵ_p tendant vers zéro de façon monotone et, posons $\mathcal{F}_{\epsilon_p} = \mathcal{F}_p, \mathcal{L}_{\epsilon_p} = \mathcal{L}_p$. Sans perte de généralité on peut supposer que dans \overline{M} les feuilletages $\mathcal{F}_{\omega(\epsilon_p)}$ n'ont pas de liaisons entre singularités d'indices 1 et $n-1$: en effet, si s_1 et s_{n-1} sont deux singularités d'indices 1 et $n-1$ respectivement dans \mathcal{F}_ω , qui sont reliées dans $\mathcal{F}_{\omega(\epsilon_p)}$ et $\mathcal{F}_{\omega(\epsilon_q)}$ alors, on peut trouver dans $(\overline{M}, \mathcal{F}_\omega)$ un lacet λ de mesure transverse $2(\epsilon_p - \epsilon_q) \in P(\omega)$,

donc deux telles singularités ne peuvent être reliées dans $\mathcal{F}_{\omega(\epsilon_p)}$ que pour une seule valeur de $2\epsilon_p$ modulo $P(\omega)$.

Ainsi, pour p assez grand, \mathcal{F}_p est comme dans la première partie, et $\pi_1(M)/\mathcal{L}_p \simeq F * \mathbb{Z}^{a_1} * \dots * \mathbb{Z}^{a_p} * (\mathbb{Z}^{a_{p+1}} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \dots * (\mathbb{Z}^{a_m} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Appliquons le Théorème 0.2 et le Lemme 0.1 au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \pi_1(\overline{M})/\overline{\mathcal{L}}_p & \xrightarrow{\alpha_p} & \pi_1(M)/\mathcal{L}_p & \xrightarrow{\beta_p} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \psi_p \downarrow & & \varphi_p \downarrow & & id \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \pi_1(\overline{M})/\overline{\mathcal{L}}_{p+1} & \xrightarrow{\alpha_{p+1}} & \pi_1(M)/\mathcal{L}_{p+1} & \xrightarrow{\beta_{p+1}} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où les lignes sont des suites exactes, les applications α_p et α_{p+1} sont celles induites par l'application de revêtement, les applications β_p et β_{p+1} envoient $[\lambda]$ sur $\overline{0}$ si λ préserve l'orientation transverse du feuilletage et sur $\overline{1}$ sinon, et les applications ψ_p et φ_p sont les épimorphismes induits par les inclusions $\overline{\mathcal{L}}_p \subset \overline{\mathcal{L}}_{p+1}$ respectivement $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_{p+1}$.

Or, pour p assez grand les épimorphismes ψ_p sont (d'après le Lemme 0.1) des isomorphismes, il est donc de même pour les φ_p : la suite des \mathcal{L}_p est donc stationnaire pour p suffisamment grand. Le théorème est démontré. \square

Essentiellement le même type de raisonnement va nous permettre de démontrer le Théorème I.2.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.2. Comme dans la démonstration du théorème I.1, supposons d'abord que les composantes minimales U_1, \dots, U_k de (M, \mathcal{F}) sont complètes et qu'il n'existe pas, dans le revêtement d'orientation $(\overline{M}, \mathcal{F}_\omega)$, de liaison entre singularités d'indices 1 et $n-1$.

Considérons $p : M_{\mathcal{L}'} \rightarrow M$ le revêtement associé à \mathcal{L}' . On remarque que pour toute feuille $L' \subset \mathcal{F}_{\mathcal{L}'} = p^*\mathcal{F}$, $p|_{L'} : L' \rightarrow L = p(L')$ est un homéomorphisme, en particulier l'holonomie de toute feuille est soit triviale, soit d'ordre deux. L'hypothèse d'absence de liaisons entre singularités d'indices $1/n-1$ sur \overline{M} implique, que les feuilles presque compactes dans la frontière d'une composante minimale de (M, \mathcal{F}) adhèrent d'un côté à la composante elle-même, et de l'autre côté à un ouvert W_k de feuilles compactes qui est soit feuilleté comme produit soit, qui possède une seule feuille non orientable donc, d'après la remarque ci-dessus, sur $(M_{\mathcal{L}'}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}'})$ on

a la même chose pour les feuilles presque compactes dans la frontière des composantes connexes du relevé d'une composante minimale U_i .

Pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, posons $p^{-1}(U_i) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_i^n$ et introduisons sur l'ensemble de feuilles non compactes la même relation d'équivalence introduite dans la démonstration du théorème I.1 en remplaçant $M_{\mathcal{L}}$ par $M_{\mathcal{L}'}$. On va associer à $(M_{\mathcal{L}'}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}'})$ un graphe $T_{\mathcal{L}'}$ défini de la façon suivante : les sommets sont respectivement les centres, les feuilles compactes non orientables et les classes données par la relation d'équivalence ci-dessus. Les arêtes sont l'espace des feuilles des ouverts W_k de feuilles compactes attachées aux sommets de la façon évidente. Puisque toute feuille compacte orientable sépare $M_{\mathcal{L}'}$ (cf. remarques), $T_{\mathcal{L}'}$ est un arbre muni d'une action naturelle et sans inversion de $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$.

Comme dans la démonstration du théorème précédent, on va déterminer les stabilisateurs des arêtes et sommets pour ensuite caractériser $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$ en appliquant le théorème de structure (cf. 5.4 [Serre]). Précisément on va montrer que les stabilisateurs des arêtes et sommets sont triviaux sauf pour les sommets qui représentent le relevé dans $M_{\mathcal{L}'}$ d'une composante minimale complète orientable U_i ; dans ce cas le groupe de stabilisateurs est $\pi_1(U_i)/\mathcal{L}'|_{U_i} \simeq \mathbb{Z}^{a_i}$. D'après ce qu'on a vu au début de ce chapitre, si U_i est une composante minimale complète alors, soit $\pi_i(U_i)/\mathcal{L}'|_{U_i} \simeq \mathbb{Z}^{a_i}$, soit $\pi_i(U_i)/\mathcal{L}'|_{U_i}$ est trivial selon que U_i est orientable ou non ; de plus $\mathbb{Z}^{a_i} \simeq P(\omega_i)$ où ω_i est la 1-forme fermée qui définit $\mathcal{F}|_{U_i}$.

Notons d'abord que $\pi_1(U_i)/\mathcal{L}'|_{U_i}$ s'injecte dans $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$: en effet, si n'est pas le cas il existe un lacet λ dans U_i qui borde une surface S immergée dans M avec $\int_{\lambda} \omega_i \neq 0$ et dont les autres composantes de bord sont des lacets contenus dans des feuilles. Par Stokes, cette surface traverse le bord de U_i et, si on considère la surface délimitée par λ et $S \cap \partial U_i$ on obtient $\int_{\lambda} \omega_i = 0$, contradiction.

Maintenant, comme dans la démonstration du théorème précédent on montre que si $p_{i,n}$ est un sommet de $T_{\mathcal{L}'}$ correspondant à une composante connexe U_i^n du relevé dans $M_{\mathcal{L}'}$ d'une composante minimale complète U_i et $G_{i,n}$ est le groupe de stabilisateurs de $p_{i,n}$, alors soit $G_{i,n} \simeq \mathbb{Z}^{a_i}$ soit trivial selon que U_i est orientable ou non.

Si p représente une feuille non orientable L dans $(M_{\mathcal{L}'}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}'})$ et $g \in G_p$, pour $x \in L$ on a aussi $g(x) \in L$ donc, il est clair que g peut être représenté par un lacet $\alpha \subset p(L)$ donc trivial dans $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$. Si p est un centre, $G_p = \{1\}$ et on voit aussi que les stabilisateurs des arêtes sont triviaux car pour

tout relevé W_k' d'un ouvert W_k de feuilles compactes, $p|_{W_k'} : W_k' \rightarrow W_k$ est un homéomorphisme. Finalement par un argument analogue à celui fait dans la démonstration du théorème précédent, on montre que si p est un sommet représentant une union de feuilles presque compactes qui adhèrent uniquement à des ouverts de feuilles compactes alors, $G_p = \{1\}$. Ensuite le théorème de structure nous donne $\pi_1(M)/\mathcal{L}' \simeq F * \mathbb{Z}^{a_1} * \dots * \mathbb{Z}^{a_p}$ ou $F = \pi_1(Y)$, $Y = T_{\mathcal{L}'}/G$ et $G = \pi_1(M)/\mathcal{L}'$.

Dans le cas général on raisonne exactement comme dans la deuxième partie de la démonstration du théorème I.1 en remarquant que \mathcal{L}' est une union croissante de \mathcal{L}'_ϵ quand ϵ décroît vers zéro, puis en appliquant le lemme 0.1 aux épimorphismes $\varphi_p : \pi_1(M)/\mathcal{L}'_p \rightarrow \pi_1(M)/\mathcal{L}'_{p+1}$ induit par les inclusions $\mathcal{L}'_p \subset \mathcal{L}'_{p+1}$, on conclut que pour p assez grand la suite des \mathcal{L}'_p est stationnaire ce qui démontre le résultat. \square

I.B. Nombre de feuilles non orientables

Dans cette section on s'intéresse, sous les hypothèses du théorème I.1, au nombre de feuilles non orientables de (M, \mathcal{F}) . On démontre précisément que la connaissance de $\pi_1(M)/\mathcal{L}$ nous permet de déterminer exactement ce nombre. D'après le théorème I.1, on sait que $\pi_1(M)/\mathcal{L} \simeq F * \mathbb{Z}^{a_1} * \dots * \mathbb{Z}^{a_p} * (\mathbb{Z}^{a_{p+1}} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \dots * (\mathbb{Z}^{a_m} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; Notons ℓ le nombre de facteurs $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans le produit libre.

THÉORÈME I.3. *Avec les hypothèses ci-dessus, le nombre de feuilles non orientables de \mathcal{F} est $\ell + 2^{a_{p+1}} + \dots + 2^{a_m}$.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème I.1, les composantes minimales complètes non orientables de \mathcal{F} sont en bijection avec les facteurs $\mathbb{Z}^{a_i} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans le produit libre, $i \in \{p + 1, \dots, m\}$. Montrons premièrement que le nombre de feuilles non orientables dans une telle composante U_i est 2^{a_i} .

Soit \overline{U}_i le relevé de U_i dans le revêtement d'orientation de (M, \mathcal{F}) et fixons une feuille non orientable $L \subset U_i$ dont on appellera son relevé \overline{L} . Si $h : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ est l'automorphisme de revêtement, fixons x et $h(x) \neq x$ dans \overline{L} . Considérons $y \in \overline{U}_i$ et γ un chemin dans \overline{U}_i joignant x et y .

Puisque $\int_\gamma \omega = -\int_{h(\gamma)} \omega$, si y et $h(y)$ sont sur une même feuille \overline{L}' on a $2 \int_\gamma \omega = \theta \in P(\omega|_{\overline{U}_i})$ et si γ' est un autre chemin joignant x et y alors, $2 \int_{\gamma'} \omega \in \theta + 2P(\omega|_{\overline{U}_i})$.

Maintenant puisque $\psi_i : \overline{U}_i/(\mathcal{F}_\omega|_{\overline{U}_i}) \rightarrow \mathbb{R}/P(\omega|_{\overline{U}_i})$ définie par $\psi_i(z) = \int_{x_0}^z \omega$ où x_0 est un point base fixé dans \overline{U}_i , est une bijection (par définition

de composante minimale faiblement complète), on voit que x et y sont sur la même feuille si et seulement si $\theta \in 2P(\omega|_{U_i})$. Ainsi à chaque feuille non orientable $L' \neq L$ dans \mathcal{F} on peut associer un élément non trivial dans $P(\omega|_{\overline{U}_i})/2P(\omega|_{\overline{U}_i}) \simeq \mathbb{Z}^{a_i}/2\mathbb{Z}^{a_i}$ et cette correspondance est injective.

Réciproquement, si $[\theta] \in \mathbb{Z}^{a_i}/2\mathbb{Z}^{a_i}$ choisissons un chemin γ dans \overline{U}_i d'origine $x \in \overline{L}$ avec $\int_\gamma \omega = \theta/2$ et un chemin λ dans \overline{L} qui lie x à $h(x)$. Le chemin $\beta = \gamma\lambda^{-1}(h(\gamma))^{-1}$ est tel que $\int_\beta \omega = \int_\gamma \omega - \int_{h(\gamma)} \omega = \theta \in P(\omega)$ ce qui implique que y (l'extrémité de γ) et $h(y)$ sont dans la même feuille, donc la feuille \overline{L}_y qui passe par y est le relevé d'une feuille non orientable. On vient donc de montrer que le nombre de feuilles non orientables dans une composante minimale complète non orientable U_i avec $\pi_1(U_i)/\mathcal{L}|_{U_i} \simeq \mathbb{Z}^{a_i} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est égal au nombre d'éléments de $\mathbb{Z}^{a_i}/2\mathbb{Z}^{a_i}$, i.e 2^{a_i} .

Soit maintenant U une composante minimale non complète, on s'intéresse au nombre de feuilles non orientables de $\mathcal{F}|_U = \Upsilon_U$ (Υ_U non transversalement orientable).

Choisissons $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que dans le revêtement d'orientation \overline{M} , le feuilletage $\mathcal{F}_{\omega(\epsilon)}$, relevé de $\mathcal{F}(\epsilon)$ obtenu en perturbant \mathcal{F} au voisinage des singularités coniques (cf démonstration du théorème I.1), ne possède pas des liaisons entre singularités d'indice $1/n-1$ et tel que $\pi_1(M)/\mathcal{L} = \pi_1(M)/\mathcal{L}_\epsilon$. Par ce choix de ϵ , il n'existe pas de feuille presque compacte non orientable dans $\mathcal{F}(\epsilon)$ et, d'après la démonstration du théorème I.1, le nombre de feuilles non orientables dans $\mathcal{F}(\epsilon)$ est exactement $\ell + 2^{a_{p+1}} + \dots + 2^{a_m}$.

Pour toute composante minimale non complète U comme ci-dessus, les feuilles régulières de $\Upsilon_U(\epsilon) = \mathcal{F}(\epsilon)|_U$ sont compactes et, si n_U (respectivement $n_U(\epsilon)$) dénote le nombre de feuilles non orientables de Υ_U (respectivement $\Upsilon_U(\epsilon)$) on a $n_U \leq n_U(\epsilon)$ car le passage de $\mathcal{F}(\epsilon)$ à \mathcal{F} se fait en "recollant" des feuilles au voisinage des singularités coniques (voir Fig. 4).

Nous allons montrer que pour ce choix de ϵ , on a $n_U = n_U(\epsilon)$: en effet, supposons que deux feuilles compactes non orientables L_1, L_2 dans $\Upsilon_U(\epsilon)$ proviennent d'une même feuille L de Υ_U après perturbation. Dans ce cas, pour un point $x_0 \in L$ fixé, il existe deux lacets α_1, α_2 dans L de la forme $\alpha_i = \gamma_i^{-1}\beta_i\gamma_i$ (où γ_i est un chemin dans L d'origine x_0 et d'extrémité égale à l'origine de β_i qui est un lacet dans L à holonomie d'ordre deux) loin des supports des fonctions "bosse" g_s (cf. démonstration du théorème I.1) et tels que après perturbation chaque β_i est un lacet

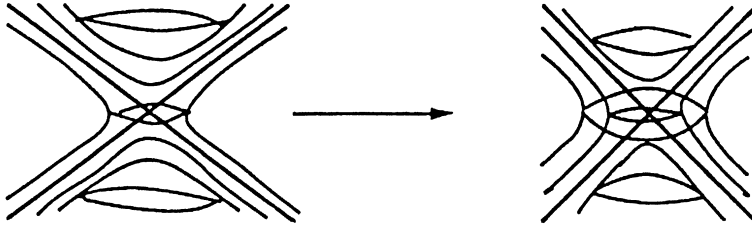


Fig. 4

dans L_i , $i = 1, 2$ à holonomie d'ordre deux. Or, dans $\mathcal{F}(\epsilon)$ chaque α_i représente un générateur d'un facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\pi_1(M)/\mathcal{L}_\epsilon$ alors que dans $\pi_1(M)/\mathcal{L}$ ils représentent le même élément (car $\alpha_1\alpha_2^{-1}$ est un lacet dans L à holonomie triviale), ce qui contredit le fait que $\pi_1(M)/\mathcal{L} = \pi_1(M)/\mathcal{L}_\epsilon$. Le même raisonnement montre que deux feuilles compactes non orientables distinctes de $\mathcal{F}(\epsilon)$ qui ne *proviennent* pas d'une composante minimale non complète de \mathcal{F} ne *proviennent* pas non plus d'une même feuille de \mathcal{F} d'où le résultat. \square

I.C. Invariant d

Dans cette section on suppose toujours (M, \mathcal{F}) comme au début du chapitre c'est à dire M^n ($n \geq 3$) est une variété fermée orientable munie d'un feuilletage mesuré \mathcal{F} non transversalement orientable avec singularités de Morse. D'après le théorème I.1 $\pi_1(M)/\mathcal{L} \simeq F * \mathbb{Z}^{a_1} * \dots * \mathbb{Z}^{a_p} * (\mathbb{Z}^{a_{p+1}} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \dots * (\mathbb{Z}^{a_m} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $k = \text{rang} F$ posons $d = k + m + \frac{\ell}{2} - 1$ où ℓ désigne le nombre de facteurs $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\pi_1(M)/\mathcal{L}$.

Nous allons interpréter l'invariant d géométriquement. Pour chaque singularité conique s de \mathcal{F} , fixons pour chaque bout singulier qui part de s , un segment transverse à \mathcal{F} proche de s , orienté comme dans la Fig. 5 et appellons Σ l'union disjointe de ces segments.

On dira qu'une singularité conique s est *bloquante* si une des deux propriétés suivantes est vérifiée : *i*) les deux bouts singuliers qui partent de s ne sont pas dans la même feuille, *ii*) les deux bouts singuliers sont dans la même feuille et l'application d'holonomie associée à tout chemin contenu dans la feuille et reliant les deux bouts singuliers, reverse l'orientation de Σ . Si \mathcal{F} est sans centre, $2d$ correspond au nombre de singularités blo-

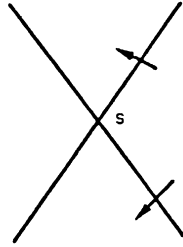


Fig. 5

quantés moins un terme correctif dû à d'éventuels cycles de liaisons entre singularités bloquantes de type i) et qui peuvent être reliés par un chemin dont l'application d'holonomie préserve l'orientation de Σ . Si \mathcal{F} possède des centres il faut en plus retrancher le nombre de centres de \mathcal{F} .

Considérons maintenant le 1-complexe K_1 où chaque composante connexe de K_1 est constituée d'une arête et de deux sommets : chaque arête correspond à une singularité conique s et chaque sommet correspond à un bout singulier qui part de s .

Définissons le 1-complexe $K = K_1 / \sim$ où " \sim " est une relation d'équivalence sur les sommets de K_1 définie de la façon suivante : on dira que $a \sim b$ pour $a, b \in \text{Som}K_1$ si les deux bouts singuliers correspondant à a et b respectivement sont dans la même feuille L et s'il existe dans L un chemin γ reliant $\Sigma \cap a$ et $\Sigma \cap b$ dont l'application d'holonomie f_γ préserve l'orientation de Σ . Géométriquement, deux bouts singuliers correspondant à un même sommet dans K correspondent à des liaisons de singularités coniques dont les feuilles proches sont indiquées dans la Fig. 6.

Appellons c le nombre de sommets de K moins le nombre de composante connexes, c'est-à-dire, $c = \sum(v_q - 1)$ ou v_q désigne le nombre de sommets de la composante K_q de K .

THÉORÈME I.5. *Soit \mathcal{F} un feuilletage mesuré de Morse sur une variété fermée M^n , ($n \geq 3$). Alors $c = 2d + n$ où n est le nombre de centres de \mathcal{F} .*

DÉMONSTRATION. Comme dans la démonstration du théorème I.1, nous utilisons un argument de perturbation.

Pour chaque singularité conique s , choisissons une fonction "bosse" g_s

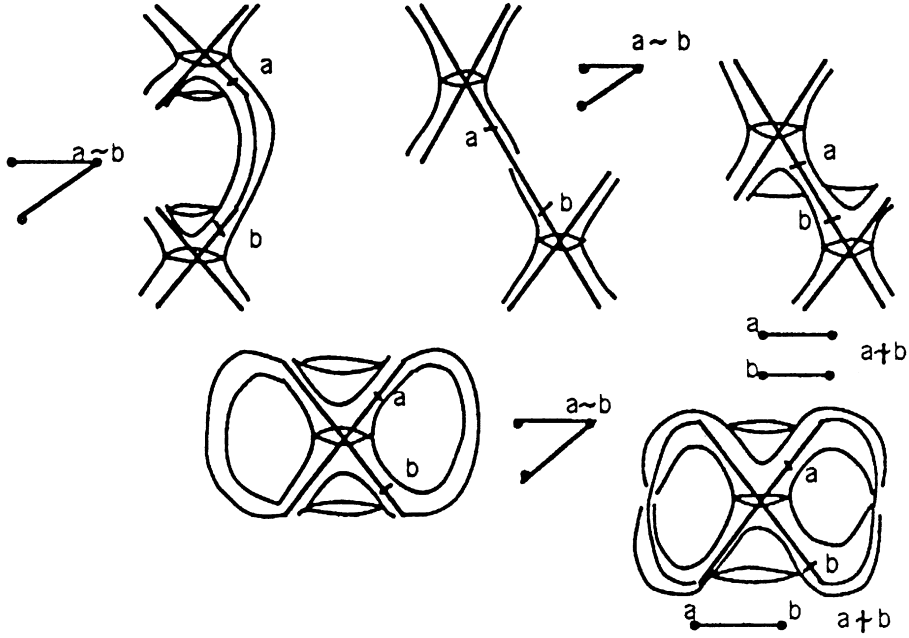


Fig. 6

(cf. I.1) et pour chaque couple de bouts singuliers correspondant à un même sommet dans K , fixons dans la feuille à laquelle ils appartiennent un chemin les reliant, loin des supports des g_s . Choisissons $\epsilon > 0$ petit et approchons \mathcal{F} par un feuilletage \mathcal{F}_ϵ de telle façon que toutes les composantes minimales de \mathcal{F}_ϵ soient complètes, que $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\epsilon) = \mathcal{L}(\mathcal{F})$ et que dans $(\overline{M}, \mathcal{F}_{\omega(\epsilon)})$, revêtement d'orientation de $(M, \mathcal{F}_\epsilon)$ il n'y ait pas de liaisons entre singularités d'indices 1 et $n - 1$.

Notons que \mathcal{F} et \mathcal{F}_ϵ ont le même 1-complexe K : en effet, deux bouts singuliers sont équivalents pour \mathcal{F}_ϵ si et seulement si ils sont équivalents pour \mathcal{F} : la condition nécessaire résulte du choix des voisinages, la condition suffisante du fait que l'on passe de \mathcal{F} à \mathcal{F}_ϵ en "coupant" les feuilles près des singularités coniques.

Posons $2d_1 = c - n$; d'après ce qui précède, \mathcal{F} et \mathcal{F}_ϵ ont le même d_1 . Nous sommes donc ramenés à montrer que $d = d_1$ pour \mathcal{F}_ϵ .

Le feuilletage \mathcal{F}_ϵ est tel que dans le revêtement d'orientation, $\mathcal{F}_{\omega(\epsilon)} = p^*(\mathcal{F}_\epsilon)$ n'a pas de liaisons entre singularités d'indices $1/n - 1$, nous pou-

vons donc considérer le graphe $Y = T/G$ comme dans la démonstration du théorème I.1. Les sommets de Y se répartissent en 5 types :

- 1) Les composantes connexes de K dont chaque sommet est une feuille presque compacte
- 2) L'union des feuilles contenues dans l'adhérence d'une composante minimale de \mathcal{F}_ϵ
- 3) Une union de feuilles presque compactes de \mathcal{F}_ϵ ne contenant aucun bout singulier d'une singularité conique
- 4) Les feuilles compactes non orientables
- 5) Les centres de \mathcal{F}_ϵ

Considérons une composante connexe K_q de K , et sa contribution $v_q - 1$ à c . Si chaque sommet de K_q est une feuille presque compacte, K_q représente un sommet de type 1 de Y et v_q est le nombre d'arêtes de Y attachées à ce sommet moins 1. Sinon, K_q adhère à exactement une composante minimale U et puisque U est complète, un seul sommet de K_q est une feuille non presque compacte. Les autres sont des feuilles presque compactes et chacune correspond à une arête de Y attachée au sommet correspondant à la composante minimale U .

Ceci permet d'interpréter $c = \sum(v_q - 1)$ comme suit : Pour chaque sommet z de Y , appelons a_z le nombre d'arêtes attachées à z . Alors on a, $c = \sum_{(1)}(a_z - 2) + \sum_{(2)} a_z$, les sommes étant prises respectivement sur les sommets de type 1 et 2.

Soit maintenant z un sommet du type 3, 4 ou 5. Dans ce cas a_z vaut respectivement 2, 1 et 1. Donc $c = \sum(a_z - 2) + 2m + n + \ell$ où m est le nombre de composantes minimales, n le nombre de centres, ℓ le nombre de feuilles compactes non orientables de \mathcal{F}_ϵ , et la somme est prise sur tous les sommets de Y . Mais il est facile de voir que $\sum(a_z - 2) = -2\chi(Y)$. Or $-\chi(Y) = k - 1 = d - m - \ell/2$, donc $c = 2d + n$. \square

REMARQUES SUR LES VARIÉTÉS OUVERTES. Dans son article intitulé "Groupe fondamental de l'espace des feuilles" [Lev 1] G. Levitt montre (Théorème II.1) que si ω est une 1-forme fermée non singulière sur une variété orientable sans bord (de dimension quelconque, pas forcément compacte), alors tout sous-groupe de type fini $H \subset \pi_1(M)/\mathcal{L}$ est un produit libre de groupes abéliens libres. Ensuite il montre (Théorème IV.6) que si M est comme ci-dessus et \mathcal{F} est supposé sans holonomie, on a aussi que tout sous-groupe de type fini $H \subset \pi_1(M)/\mathcal{L}$ est un produit libre de groupes

abéliens libres, de plus si aucune feuille de \mathcal{F} n'est localement dense, alors H est libre.

On vérifie (voir [Gus]) que les démonstrations de ces résultats s'étendent au cas général et on obtient que si \mathcal{F} est un feuilletage de codimension un sur M non transversalement orientable tel que dans le revêtement d'orientation $p : \overline{M} \rightarrow M$, $p^*\mathcal{F}$ est soit défini par une 1-forme fermée (non singulière) soit sans holonomie, alors tout sous-groupe de type fini $H \subset \pi_1(M)/\mathcal{L}$ est un produit libre de groupes dont les facteurs sont des groupes abéliens libres, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et groupes diédraux $\mathbb{Z}^a \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($a \geq 2$), de plus si aucune feuille de \mathcal{F} n'est localement dense, alors H est un produit libre de groupes dont les facteurs sont des groupes abéliens libres de rang 1 et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Par contre avec le mêmes hypothèses on a que tout sous-groupe de type fini $H \subset \pi_1(M)/\mathcal{L}'$ est un produit libre de groupes abéliens libres et si aucune feuille de \mathcal{F} n'est localement dense, alors H est un groupe libre. En particulier si le feuilletage \mathcal{F} est sans holonomie, alors tout sous-groupe de type fini $H \subset \pi_1(M)/\mathcal{L}$ est un produit libre de groupes abéliens libres et, si aucune feuille de \mathcal{F} n'est localement dense, H est un groupe libre.

On peut vérifier aussi qu'en utilisant cette dernière remarque, la même démonstration du Théorème V.1 de [Lev 1] (qui dit qu'un groupe G de type fini agissant librement sur une 1-variété connexe et simplement connexe V par C^2 -difféomorphisme en préservant l'orientation est un produit libre de groupes abéliens libres) s'étend au cas où l'action ne preserve pas l'orientation de V .

II. Feuilletages presque sans holonomie

Dans la suite on désignera par (M, \mathcal{F}, X) ou simplement (M, \mathcal{F}) , une variété de dimension n , compacte, orientable, munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension un de classe C^r ($r \geq 2$), transversalement orienté par un champ de vecteurs X . On suppose que si $\partial M \neq \emptyset$, alors \mathcal{F} est tangent au bord ∂M .

DEFINITION II.1. Le feuilletage \mathcal{F} est dit presque sans holonomie (p.s.h) si toute feuille $F \in \mathcal{F}$ à holonomie non triviale est compacte.

D'après un théorème de R. Sacksteder [Sac 1] un feuilletage de classe C^r , $r \geq 2$ presque sans holonomie ne possède pas d'ensemble minimal exceptionnel.

Les principales propriétés des feuilletages presque sans holonomie ont été obtenues par G. Hector [**Hec 1**] et H. Imanishi [**Im 2**] quant à leur structure générale et par R. Moussu [**Mou 1**] quant à leur holonomie.

DÉFINITION II.2. (cf. [**Hec 1**]) Un feuilletage p.s.h (M, \mathcal{F}, X) est un modèle (de feuilletage p.s.h) de type 1 ou 2 si la condition correspondante est satisfaite :

- 1) Le feuilletage $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ induit par \mathcal{F} dans l'intérieur $\overset{\circ}{M}$ de M est sans holonomie.
- 2) M est C^r -difféomorphe à un produit de la forme $L \times [0, 1]$ (où L est une composante de ∂M) et \mathcal{F} est transverse au facteur $[0, 1]$.

REMARQUE II.3. On peut montrer (voir [**F**] ou [**C.G**]) que si (M, \mathcal{F}) est un modèle de type 1 alors le feuilletage $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ de $\overset{\circ}{M}$ est topologiquement conjugué à un feuilletage de classe C^r défini par une 1-forme fermée ω pour laquelle il existe un champ de vecteurs complet Y avec $\omega(Y) = 1$.

Désignons par $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_\omega$ le feuilletage de $\overset{\circ}{M}$ défini par ω et, pour un point $x \in \overset{\circ}{M}$ fixé, $[\omega] : \pi_1(\overset{\circ}{M}, x) \rightarrow \mathbb{R}$ l'homomorphisme obtenu en intégrant ω au long des lacets. Soit H le noyau de ce morphisme, alors le groupe quotient $\pi_1(\overset{\circ}{M}, x)/H$ s'identifie au sous-groupe de \mathbb{R} des périodes $P(\omega)$ de ω , il est donc abélien libre et, puisque $\overset{\circ}{M}$ est compacte, il est de rang fini non nul.

On désigne par $p : N \rightarrow \overset{\circ}{M}$ le revêtement galoisien de $\overset{\circ}{M}$ associé à H , et par y un point de la fibre $p^{-1}(x)$. La fonction $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(z) = \int_\gamma p^*(\omega)$ où γ est un chemin dans N joignant y à z est une submersion définissant $p^*\overset{\circ}{\mathcal{F}}_\omega$ et est telle que $p^*\omega = df$ et $f(y) = 0$. De plus, si \bar{L} est la feuille de $p^*\overset{\circ}{\mathcal{F}}_\omega$ contenant y , la projection p est un difféomorphisme de \bar{L} sur L .

Nous pouvons voir ensuite que puisque $\omega(Y) = 1$, la dérivée de Lie $L_Y\omega = 0$ ce qui entraîne que le groupe à un paramètre (ψ_t) de difféomorphismes de $\overset{\circ}{M}$ engendré par Y laisse le feuilletage $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_\omega$ invariant. Toutes ses feuilles sont donc difféomorphes et échangées transitivement par (ψ_t) .

Soit $Z = p^*Y$ le champ de vecteurs (complet) sur N et (φ_t) le groupe à un paramètre de difféomorphismes de N engendré par Z . On a $f(\varphi_t(z)) = t + f(z)$ pour tout $z \in N$ et l'application $h : (z, t) \rightarrow \psi_t(z)$ est un difféomorphisme de $\bar{L} \times \mathbb{R}$ sur N . On en déduit en particulier que tout élément

de $\pi_1(\overset{\circ}{M}, x)$ est représentable par un lacet dans une feuille L ou par une courbe fermée transverse à $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_\omega$.

Notons aussi que puisque $P(\omega)$ laisse $p^*\overset{\circ}{\mathcal{F}}_\omega$ invariant et opère sur son espace des feuilles par translation, soit $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_\omega$ est une fibration sur S^1 , soit $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_\omega$ a toutes ses feuilles denses selon que $P(\omega)$ est cyclique ou non.

Un modèle de type 2 sur $M = L \times [0, 1]$ est complètement déterminé par une représentation abélienne du groupe fondamental de L dans le groupe des homéomorphismes croissants de classe C^r , $r \geq 2$, de $[0, 1]$. En particulier si $\overset{\circ}{M}$ n'a pas de feuilles compactes, puisque \mathcal{F} n'a pas de minimal exceptionnel (\mathcal{F} est au moins de classe C^2), \mathcal{F} est topologiquement conjugué au feuilletage suspension d'un groupe de type fini G de translations de \mathbb{R} et a ses feuilles ou toutes propres ou toutes denses selon que G est de rang 1 ou non.

Le théorème suivant dû à G. Hector (cf. [He 1]) permet de réduire l'étude des feuilletages p.s.h à celle des modèles.

THÉOREME II.4. *Si (M, \mathcal{F}) est une variété compacte munie d'un feuilletage p.s.h de classe C^r , $r \geq 2$, il existe une suite finie $\{(M_i, \varphi_i)\}_{i \in \{1, \dots, p\}}$ de variétés compactes M_i et d'immersions :*

$\varphi_i : M_i \rightarrow M$. telle que

a) pour tout i , l'image $\varphi_i(M_i)$ de φ_i est une sous-variété compacte, saturée de (M, \mathcal{F}) et la restriction de φ_i à $\overset{\circ}{M}_i$ et à chaque composante de ∂M_i est injective ;

b) La réunion des sous-variétés $\varphi_i(M_i)$ est égale à M et $(M_i, \varphi_i^*(\mathcal{F}))$ est un modèle pour tout i .

II.A. Détermination de $\pi_1(M)/\mathcal{L}$ et $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$ pour les feuilletages presque sans holonomie

On se propose dans cette partie, en utilisant la même technique utilisée dans la partie I, de démontrer les deux théorèmes suivants :

THÉOREME II.A.1. *Soit (M, \mathcal{F}) une variété orientable fermée munie d'un feuilletage de codimension un de classe C^r , $r \geq 2$ presque sans holonomie, alors $\pi_1(M)/\mathcal{L}' \simeq F * G_1 * \dots * G_p$ où F est un groupe libre, les G_i sont des groupes abéliens (pas forcément libres) et sont en correspondance 1-1 avec les modèles du type 1 qui ne sont pas du type 2.*

THÉORÈME II.A.2. *Soit (M, \mathcal{F}) comme dans le théorème précédent. Alors, $\pi_1(M)/\mathcal{L}$ est isomorphe au groupe fondamental d'un graphe de groupes (G, Y) où chaque groupe qui le constitue est un groupe abélien (pas forcément libre).*

Tout d'abord le théorème II.4 nous dit qu'on peut décomposer (M, \mathcal{F}) en sousvariétés fermées $(M_1, \mathcal{F}_1), \dots, (M_p, \mathcal{F}_p), (M_{p+1}, \mathcal{F}_{p+1}), \dots, (M_s, \mathcal{F}_s)$ où chaque (M_i, \mathcal{F}_i) $1 \leq i \leq p$ est un modèle de type 1 qui n'est pas du type 2 et pour $i > p$, (M_i, \mathcal{F}_i) est un modèle de type 2 où chaque composante de bord, i.e. $L_i \times \{0\}$ et $L_i \times \{1\}$ où L_i est une feuille compacte, est bord commun d'un (unique) modèle (M_j, \mathcal{F}_j) pour $1 \leq j \leq p$.

Nous allons étudier tout d'abord les groupes $\pi_1(M_i)/\mathcal{L}_i$ et $\pi_1(M_i)/\mathcal{L}'_i$ pour les composantes (M_i, \mathcal{F}_i) ci-dessus, où $\mathcal{L}_i = \mathcal{L} \upharpoonright_{M_i}$ et $\mathcal{L}'_i = \mathcal{L}' \upharpoonright_{M_i}$.

Pour (M_i, \mathcal{F}_i) , $1 \leq i \leq p$ $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_i$ est topologiquement conjugué à un feuilletage $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_{\omega_i}$ défini par une 1-forme fermée ω_i et, puisque les groupes qui nous intéressent restent inchangés (à isomorphisme près) pour des feuilletages conjugués, on peut supposer que les feuilletages \mathcal{F}_i , $1 \leq i \leq p$ sont définis par ω_i . Aussi puisque pour telles composantes $\pi_1(M_i)/\mathcal{L}_i = \pi_1(\overset{\circ}{M}_i)/\mathcal{L}_i \upharpoonright_{\overset{\circ}{M}_i}$, nous avons, d'après les remarques IV.3, $\pi_1(M_i)/\mathcal{L}_i \simeq P(\omega_i) \simeq \mathbb{Z}^{a_i}$.

Pour le cas où $M_i = L_i \times [0, 1]$, désignons par (W_n^i) , $n \in \mathbb{N}$ les composantes connexes du complémentaire $M_i - A$ des feuilles compactes. Nous avons déjà fait remarquer que pour un n donné, $(\overline{W}_n^i, \mathcal{F}_n^i)$ est complètement déterminé par une représentation $\varphi_{i_n} : \pi_1(L_{i_n}) \rightarrow \text{Diff}^+([0, 1])$ (où L_{i_n} est une feuille compacte dans $\partial \overline{W}_n^i$) dont l'image est un groupe abélien libre $G_{i_n} \simeq \mathbb{Z}^{a_{i_n}}$ de difféomorphismes croissants de $[0, 1]$. On note que puisque le feuilletage \mathcal{F}_n^i est transversalement orientable les feuilles L_{i_n} sont toutes difféomorphes à L_i .

Pour chaque n soit H_n le noyau de la représentation φ_{i_n} . Il est clair que le sousgroupe normal \mathcal{L}_i de $\pi_1(M_i) = \pi_1(L_i)$ correspond exactement au plus petit sousgroupe normal de $\pi_1(L_i)$ qui contient tous les H_n . Nous avons ainsi naturellement un morphisme surjectif $\psi_i : \pi_1(L_i)/H_n \rightarrow \pi_1(M_i)/\mathcal{L}_i$ induit par l'inclusion $H_n \subset \mathcal{L}_i$ et, puisque $\pi_1(L_i)/H_n$ est un groupe abélien libre le groupe $\pi_1(M_i)/\mathcal{L}_i$ est abélien.

Traisons maintenant les groupes $\pi_1(M_i)/\mathcal{L}'_i$ pour les composantes M_i comme cidessus. Nous allons étudier ces groupes pour les composantes M_i

du type 1 qui ne sont pas du type 2 car celles de type 2 ont comme groupe associé le groupe trivial.

Remarquons d'abord que pour une telle composante (M_i, \mathcal{F}_i) , $\pi_1(\overset{\circ}{M}_i)/\mathcal{L}'_i \big|_{\overset{\circ}{M}_i} \simeq P(\omega_i) \simeq \mathbb{Z}^{a_i}$ car $\mathcal{L}_i \big|_{\overset{\circ}{M}_i} = \mathcal{L}'_i \big|_{\overset{\circ}{M}_i}$. On peut voir ainsi que pour obtenir $\pi_1(M_i)/\mathcal{L}'_i$ il faut tuer aussi les lacets $\gamma \subset \overset{\circ}{M}_i$ avec $\int_\gamma \omega_i \neq 0$ et qui sont homotopes à un produit de lacets contenus dans des feuilles du bord de M_i , plus précisément, pour un point $x_i \in \overset{\circ}{M}_i$ fixé, $\pi_1(M_i, x_i)/\mathcal{L}'_i$ est le quotient de $\pi_1(\overset{\circ}{M}_i, x_i)/\mathcal{L}'_i \big|_{\overset{\circ}{M}_i}$ par le sous-groupe normal H_i engendré par les lacets de la forme $c^{-1}\lambda c$ où c est un chemin d'origine x_i et qui a pour extrémité, l'origine d'un lacet λ contenu dans une feuille L du ∂M_i bord de M_i ; ici évidemment $\pi_1(L)$ est vu comme un sous-groupe de $\pi_1(\overset{\circ}{M}_i)$.

On voit ainsi que $\pi_1(M_i)/\mathcal{L}'_i$ est un quotient du groupe abélien libre $P(\omega_i)$, donc abélien. L'exemple ci-dessous dû à G. Levitt montre qu'en général ce groupe n'est pas abélien libre.

Exemple II.A.3. Considérons le tore $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ feuilleté par plans. Désignons par α_1 un des générateurs de $\pi_1(T^3)$ transverse au feuilletage. Ensuite, si on tourbillonne le long de α_1^2 on obtient une variété fermée munie d'un feuilletage presque sans holonomie et qui se décompose en deux modèles M_1 et M_2 de feuilletages p.s.h de type 1 qui ne sont pas du type 2 où (M_1, \mathcal{F}_1) est une variété compacte dont le bord est le tore T^2 frontière du voisinage tubulaire de α_1^2 où on tourbillonne, et \mathcal{F}_1 est tel que toutes les feuilles dans l'intérieur de M_1 sont des cylindres. Le modèle (M_2, \mathcal{F}_2) n'est rien d'autre qu'une composante de Reeb dont la feuille bord coincide avec celle de M_1 . En suite on peut voir facilement que $\pi_1(M_1)/\mathcal{L}'_1 \simeq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II.A.1. Comme au debut de cette section, nous avons une décomposition de (M, \mathcal{F}) en modèles $(M_1, \mathcal{F}_1), \dots, (M_p, \mathcal{F}_p), \dots, (M_s, \mathcal{F}_s)$ où les premiers p modèles sont ceux de type 1 qui ne sont pas du type 2 et les autres sont des modèles du type 2 tels que chaque feuille du bord est bord aussi d'un unique modèle $M_j, 1 \leq j \leq p$.

Considerons $p : M_{\mathcal{L}'} \rightarrow M$ le revêtement de M associé à \mathcal{L}' et désignons par $\mathcal{F}_{\mathcal{L}'}$ le feuilletage relevé. Notons tout d'abord que pour toute composante connexe $M_i^n, n \in \mathbb{N}$ et $i > p$, du relevé d'un modèle $M_i, i > p$, nous

avons que $p \mid_{M_i^n} : M_i^n \rightarrow M_i$ est un homéomorphisme et pour chaque n , M_i^n a évidemment aussi la propriété que chaque feuille (compacte) constituant son bord est bord aussi d'une unique composante connexe M_j^m du relevé d'un modèle M_j pour $1 \leq j \leq p$.

Nous allons pouvoir ainsi associer à $\mathcal{F}_{\mathcal{L}'}$ un graphe T de la façon suivante : les sommets sont les composantes connexes du relevé des composantes M_i , $1 \leq i \leq p$ (i.e celles de type 1 qui ne sont pas du type 2) et les arêtes sont d'une part les composantes connexes du relevé des modèles M_i , $i > p$, et d'autre part les composantes connexes du relevé des feuilles compactes qui sont bord commun à deux modèles M_i, M_j où $i, j \leq p$, toutes attachées aux sommets de la façon évidente. Maintenant, puisque $\pi_1(M_{\mathcal{L}'})$ est engendré par des lacets contenus dans des feuilles, toute feuille compacte sépare $M_{\mathcal{L}'}$ en deux composantes connexes, ce qui entraîne que T est en fait un arbre. De plus, nous avons une action naturelle et sans inversion de $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$ sur T .

Nous pouvons ainsi comme dans la partie I utiliser la théorie de Bass-Serre sur les graphes de groupes pour déterminer $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$. Nous allons donc déterminer les stabilisateurs des sommets et des arêtes. Tout d'abord il est clair que pour toute arête y de T correspondante au relevé d'un modèle $M_i, i > p$ (i.e du type 2), le groupe de stabilisateur G_y est trivial car tout élément de G_y peut être représenté par la classe d'un lacet dans $\pi_1(M_i)/\mathcal{L}'_i$ et $\pi_1(M_i)/\mathcal{L}'_i = \{1\}$. Notons aussi que puisque les autres arêtes sont des feuilles (compactes), leurs stabilisateurs sont eux aussi des groupes triviaux.

Pour déterminer les stabilisateurs des sommets notons d'abord que pour tout modèle $(M_i, \mathcal{F}_i), i \leq p$, les groupes $\pi_1(M_i)/\mathcal{L}'_i$ s'injectent dans $\pi_1(M)/\mathcal{L}'$, ensuite puisque là aussi chaque élément du groupe de stabilisateurs G_p d'un sommet p correspondant à une composante connexe du relevé d'un modèle (M_i, \mathcal{F}_i) , peut être représenté par la classe d'un lacet dans $\pi_1(M_i)/\mathcal{L}'_i$, on obtient que $G_p = \pi_1(M_i)/\mathcal{L}'_i$, donc un groupe abélien comme on a vu ci-dessus.

Nous pouvons ainsi associer à cette action (cf. partie I) le graphe de groupes (G, Y) où $G = \pi_1(M)/\mathcal{L}', Y = T/G$ est le graphe quotient et les groupes des sommets et des arêtes sont respectivement des groupes abéliens et groupes triviaux, donc d'après le théorème de structure ([Serre]) G est isomorphe au groupe fondamental de ce graphe de groupes donc isomorphe à $F * G_1 * \dots * G_p$ où $F = \pi_1(Y)$ est un groupe libre et $G_i = \pi_1(M_i)/\mathcal{L}'_i$. \square

Avant de démontrer le théorème II.A.2 faisons quelques remarques : Considerons $p : M_{\mathcal{L}} \rightarrow M$ le revêtement de M associé à \mathcal{L} et désignons par $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ le feuilletage relevé. Notons premièrement que, puisque toute feuille L' de $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ relevée d'une feuille compacte L de \mathcal{F} est fermée, et, puisque $\pi_1(M_{\mathcal{L}})$ est engendré par des lacets contenus dans des feuilles et d'holonomie triviale, toute feuille L' separe $M_{\mathcal{L}}$.

Remarquons aussi que si X est un champ de vecteurs transverse à \mathcal{F} et $M_i = L \times [0, 1]$ est un modèle de type 2, les orbites de X restreintes à M_i définissent un feuilletage trivial de M_i , on voit ainsi que si M_i^n est une composante connexe du relevé de M_i , $L' \subset M_i^n$ le relevé de L , et ψ_t désigne le flot du champ $Y = p^*X$, l'application $\psi : L' \times [0, 1] \rightarrow M_i^n$ définie par $\psi(x, t) = \psi_t(x)$ est un difféomorphisme. De plus il est clair que chaque feuille dans le bord de M_i^n est bord aussi d'une unique composante M_j^m relevée d'un modèle M_j où $j \leq p$, i.e un modèle de type 1 qui n'est pas du type 2.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II.A.2. D'après ce qu'on vient de voir on peut associer à $(M_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}})$ un arbre T de la même façon que dans la démonstration du théorème précédent, c'est-à-dire les sommets sont les composantes connexes du relevé des modèles $M_i, i \leq p$ et les arêtes sont d'une part les composantes connexes du relevé des modèles $M_i, i > p$, d'autre part les feuilles L' relevées des feuilles compactes qui sont bord commun de deux modèles M_i, M_j de type 1 qui ne sont pas du type 2. Nous avons là aussi une action de $G = \pi_1(M)/\mathcal{L}$ sur T .

Pour montrer que les stabilisateurs des sommets et des arêtes sont des groupes abéliens notons d'abord que pour les modèles $M_i, 1 \leq i \leq s$ on a des morphismes $\varphi_i : \pi_1(M_i)/\mathcal{L}_i \rightarrow \pi_1(M)/\mathcal{L}$ (en général non injectifs) induits par les inclusions $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}$, de plus il est facile de voir que le groupe qui stabilise un sommet ou une arête de T correspondant au relevé d'un tel modèle est exactement l'image de ce morphisme, donc isomorphe à un quotient de $\pi_1(M_i)/\mathcal{L}_i$ donc abélien d'après ce qu'on a vu ci-dessus. Pour les arêtes correspondant au relevés d'une feuille compacte L qui bordent deux modèles $M_i, M_j, i, j \leq p$ il est clair que le groupe de stabilisateurs est un quotient du groupe d'holonomie de la feuille L donc abélien d'après le théorème, 3 [Hec 1].

Finalement le théorème de structure, nous dit que $G = \pi_1(M)/\mathcal{L}$ s'identifie au groupe fondamental du graphe de groupes $(G, Y = T/G)$

dont les groupes qui le constituent sont ceux ci-dessus ce qui démontre le théorème. \square

Pour chaque modèle $(M_i, \mathcal{F}_i), i > p$, i.e $M_i = L_i \times [0, 1]$ nous avons une représentation $\varphi_i : \pi_1(L_i) \rightarrow \text{Diff}_r^+([0, 1])$. Désignons par G_i l'image de cette représentation et par f_{i_1}, \dots, f_{i_m} les generateurs de G_i . Notons que les feuilles compactes de \mathcal{F}_i correspondent à des points fixes communs à tous les f_{i_j} .

COROLLAIRE II.A.4. *Soit (M, \mathcal{F}) comme dans le théorème II.A.2 et supposons en plus que tout groupe G_i comme ci-dessus est tel que chaque generateur f_{i_j} possède un point fixe x_{i_j} correspondant à une feuille compacte où sur un intervalle contenant x_{i_j}, f_{i_j} est l'identité. Alors, $\pi_1(M)/\mathcal{L} = \pi_1(M)/\mathcal{L}'$.*

Bibliographie

- [A.L.] Arnoux, P. et G. Levitt, Sur l'unique ergodicité des 1-formes fermées singulières, *Inv. Math.* **84** (1986), 141–156.
- [Buff-Lor] Buffet, J. and J. C. Lor, Une construction d'un universal pour une classe assez large de Γ -structures, *C. R. Acad. Sc. Paris* **270** (1970), 640–642.
- [F] Fall, A., Feuilletages presque sans holonomie et transversalement homographiques, Thèse-Université des Sciences et Techniques de Lille I (1981).
- [C.G.] Godbillon, C., Feuilletages étude géométrique, *Progress in Mathematics* Birkhäuser (1991).
- [Gus] Gusmão, P. C. H., Thèse, Université Paul Sabatier (Toulouse III) (1993).
- [Hae 1] Haefliger, A., Homotopy and Integrability Manifolds Amsterdam, Springer Lectures Notes **197** (1970), 133–163.
- [Hae 2] Haefliger, A., Structure transverse des feuilletages, *Astérisque* **116** (1984), 70–97.
- [H.R.] Haefliger, A. et G. Reeb, Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan, *Enseign. Math.* **3** (1957), 107–126.
- [Hec 1] Hector, G., Croissance des feuilletages presque sans holonomie, *Lectures Notes in Math.* **652** (1976), 141–182.
- [Hec 2] Hector, G., Feuilletages en cylindres *Geometry and Topology* Rio de Janeiro, Lectures Notes in Math. **597** (1977), 252–270.

- [Im 1] Imanishi, H., On the theoreme of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy, *J. Math. Kyoto Univ.* **14** (1974), 607–634.
- [Im 2] Imanishi, H., Structure of codimension one foliation which are almost without holonomy, *J. Math. Kyoto Univ. (IMKYAZ)* **16-1** (1976), 93–99.
- [Im 3] Imanishi, H., On codimension one foliations defined by closed one forms with singularities, *J. Math. Kyoto Univ.* **19** (1979), 285–291.
- [Lev 1] Levitt, G., Sur les mesures transverses invariantes d'un feuilletage de codimension 1, *C. R. Acad. Sc. Paris* (1980), 1139–1140.
- [Lev 2] Levitt, G., 1-formes fermées singulières et groupe fondamental, *Inv. Math.* **88** (1987), 635–667.
- [Lev 3] Levitt, G., Groupe fondamental de l'espace des feuilles dans les feuilletages sans holonomie, *Jour. Diff. Geom.* **31** (1990), 711–761.
- [Lev 4] Levitt, G., La Dynamique des Pseudogroupes de Rotation, Prépublication du Laboratoire de Topologie et Géométrie. URA CNRS 1408 Univ. Paul Sabatier Toulouse.
- [Sac-Sh] Sacksteder, R. et A. Schwartz, Limits sets for foliations, *Ann. Inst. Fourier* **15** (1965), 201–214.
- [Sac 1] Sacksteder, R., Foliations and pseudogroups, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 79–102.
- [Salem] Salem, E., Riemannian foliations and pseudogroups et isometries appendix D. in P. Molino Riemannian foliations, *Progress in Mathematics* **73** Birkhäuser (1988).
- [Serre] Serre, J. P., Arbres amalgames SL_2 , *Astérisque* **46** (1977).

(Received November 4, 1993)

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matematica
Departamento de Matematica
Aplicada, Rua Sao Paulo
s/n - Valonguinho. CEP
24020-005
Niteroi RJ
Brasil