球面カンドルと結び目の不変量

-本講演の概要-

講演者は、カンドル(Quandle)と呼ばれる代数系を用いた結び目理論の研究に興味がある。本講演では、Azcan-Fennにより、1994年に定義された球面カンドル(Sherical Quandle)と、それに関係する結び目の不変量について述べる。

九州大学大学院数理学府　博士2年

米村拳太郎

Email：3MA20009Y@s.kyushu-u.ac.jp

令和3年11月13日土曜日

本講演の題目の説明

講演題目に出ていた用語と講演の目的を簡単に説明する.

結び目理論 (Knot Theory)

紐の結び方を数学的手法を駆使して分類する学問.
DNA の構造解析, 暗号理論, そしてトポロジカル量子コンピューターなどの新技術への応用も模索されている.

カンドル (Quandle)

結び目理論を研究するために作られた代数系.
つまり, 集合 X とその上の演算 $\triangleright : X \times X \to X$ の組 $(X, \triangleright)$.

この講演の目的

このスライドでは、球面カンドルをはじめとした等質空間としての構造も併せ持つカンドルとその理論の展望を概説する。

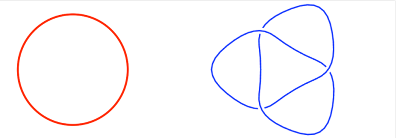
結び目を数学を用いて調べる理由

問題提起

2 次元的な単純な絵で描けるもの (例えば結び目) であっても, 2 つが異なることを示すのは難しい.$\rightarrow$ 応用：画像認識によるロボット判定.

問題例

自明な結び目 (輪っか, 図左) と 3_1(真結び, 図右) を区別出来るか？



$\Delta_{0_1}(t) = 1$ $\quad$ $\Delta_{3_1}(t) = t^{-1} - 1 + t$

問題への解：不変量の構成

結び目が同値であることの必要条件(不変量)を構成する.
例：図下のAlexander多項式 (Alexander 1923)
樹下・寺阪結び目等に対する脆弱性が知られている.

不変量の不完全性

一般に, 不変量を通して見ても見分けられない結び目の組がある.

球面カンドルと結び目の不変量

球面カンドル [Azcan-Fenn1994]

2 次元球面 $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, x\rangle = 1\}$ 上に二項演算

$$x \triangleright y = 2\langle x, y\rangle y - x$$

を定めると、$(S^2, \triangleright)$ はカンドルとなる。これを球面カンドルという。

球面カンドルによる既存の結び目不変量

[Clark-Saito2019] による Longitudinal map がある。

今後、球面カンドルとの関係を調べたい結び目の不変量

[講演者 2021] により、球面カンドルは結び目群の $SU(2)$ 表現との関係が知られているため、Casson-Lin 不変量、インスタントン Floer ホモロジー、Alexander 多項式 etc... と球面カンドルの関係を記述できないか？

講演者の研究の展望

問題提起

- 球面カンドルのように、カンドル構造を持つ等質空間の例を構成することは出来るか？
- 構成したカンドルを用いて、新たな結び目の不変量を構成することは出来るか？
- 構成したカンドルを用いて、既存の結び目の不変量を再構成することは出来るか？

参考

カンドルが定義された [Joyce1982] において、カンドルと等質空間の類似が指摘されており、自然な問題である。一方で、誰も考えていないブルーオーシャンでもある。