ある特殊関数の連分数展開と近似について

村林　直樹 [1]　　吉田　颯飛 [2]（発表者）

[1] 関西大学システム理工学部数学科関西大学システム理工学部

[2] 関西大学大学院理工学研究科総合理工学専攻

ある楕円曲線に関する論文を読んでいると、ある特殊関数の連分数展開が証明無しに載せられていた。私には自明に思えなかったので、少し変形したものを実数の正則連分数展開の方法を応用し、更に正の無理数 α の連分数展開が α に収束することを示す要領で元々考えていた連分数が元の関数に収束することを示した。実はこの関数の特殊値に δ（Gompertz constant）という無理数か否か分かっていない定数が現れる。現在は連分数の理論を応用して得られた有理関数近似を用いてディオファントス近似の理論から δ の無理性について研究をしている。

特殊関数 $F(x)$

我々が考えた特殊関数 $F(x)$ は次に定義されるもので、0 より大きい実数を動く。

$$F(x) := e^x E_1(x) = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+x} dt.$$

この関数の連分数展開は以下で与えられる。

$$F(x) = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{\frac{1}{2} + \cfrac{1}{x + \cdots}}}}}$$

$F(x)$ の有理関数近似

関数 $F(x)$ の連分数は次のような有理関数近似をもつ。

$$\frac{P_{2k}(x)}{Q_{2k}(x)} < F(x) < \frac{P_{2k-1}(x)}{Q_{2k-1}(x)}.$$

ここで、

$$\frac{P_{2k-1}(x)}{Q_{2k-1}(x)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{k-i-1} \frac{{}_kC_{l+i+1}}{(l+k)\cdots(l+1)}(-1)^l x^i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\frac{{}_kC_{i+1}}{i!}x^{i+1}}$$

$$\frac{P_{2k}(x)}{Q_{2k}(x)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{k-i-1} \frac{{}_kC_{l+i+1}}{(l+i+1)\cdots(l+1)}(-1)^l x^i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\frac{{}_kC_{i}}{i!}x^{i}}$$

誤差の評価と δ

先ほどの評価と $P_{n-1}(x)Q_n(x) - P_n(x)Q_{n-1}(x) = (-1)^n$ であることを用いれば誤差は

$$\left| F(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| < \frac{1}{Q_n(x)Q_{n-1}(x)}$$

と評価できる。ただし n は 1 以上の整数で $Q_0(x) = 1$ である。
　さて、$F(1) = \delta$ であるから

$$\left| \delta - \frac{P_n(1)}{Q_n(1)} \right| < \frac{1}{Q_n(1)Q_{n-1}(1)}$$

となる。しかしこの評価では δ の無理性についてなにも分からない。そこで我々は $P_n(1)$ と $Q_n(1)$ の整数部分を考えることで次の式を得た。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[P_n(1)]}{[Q_n(1)]} = \delta.$$

今後の課題

δ とオイラー定数 γ の間には $\delta = -e\gamma + e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!}$ という関係がある。δ の無理性が証明できれば γ の無理性についても研究していきたい。そのためには

・δ の無理性を示すことができるような $\left|\delta - \frac{[P_n(1)]}{[Q_n(1)]}\right|$ の上からの評価を与える。

・γ についても同様の方法で評価を与えられるか。

など様々な問題が考えられる。更に強いこととして δ と γ の超越性についても研究をしていきたい。