幅 n の代数構造に対応した中間命題論理の保存拡大性

横溝恭平 (関東学院大学)

研究の位置付けと動機

本発表の内容は数理論理学という、「数学の証明」を数学のフレームワークで扱おうと試みる分野に属するものです。数理論理学は現在ではコンピュータ・サイエンスとの関連が強調されますが、その視点では普段我々が数学の証明を行う際用いる論理 (古典論理) は、コンピュータにとって都合の悪い性質を多く含むことが知られています。中間論理はその点が解決されるための条件、つまりコンピュータにとって都合がよいと考えられる種々の性質が一体どのような条件によって得られるか、という特徴づけに繋がると考えられるものです。本発表は数理論理学の中でも比較的「おおざっぱ」に論理を数学的な構造にした中間命題論理に対し、さらにそのうちいくつかの数学的な概念…「and」や「or」といったものの一部を制限した (使用不可とした) 論理を考察します。これらを制限することによって得られる恩恵は、数学の証明に際してこれらの概念がどのように働くか、また相互的な関係について知ることが出来る点にあります。具体的には、論理の性質を知るためより直接的な恩恵が知られるカット除去定理などの強力な定理に対し、その補題として働くことが期待されます。

発表者略歴

平成 30 年 3 月：博士 (理学) を取得 (日本大学) （中間命題論理の論理断片間の保存性問題とその応用の研究による）

平成 30 年 4 月～：非常勤講師 (関東学院大学 他)

命題論理

命題論理では、数学的な文章を変数 $p, q, \ldots,$ と 4 つの論理記号 $\to$(ならば)、$\wedge$(かつ)、$\vee$(または)、$\neg$(否定) で組み合わせた **(命題) 論理式**と呼ばれる文字列で表す。例えば論理式

$$p \vee \neg p$$

は「p または p でない」などと読む。

$$\mathbf{L} \vdash A$$

は命題論理式 A が命題論理 $\mathbf{L}$ で証明可能であるという。命題論理の主な目的の 1 つは、無限に存在する命題論理及び命題論理式に対し、この証明可能性の関係 $\vdash$ を考察することである。

古典論理

我々が普段使う数学の論理を**古典論理** (Classical logic, 以下 $\mathbf{C}$) という。古典論理は「神の論理」ともいわれ、我々人間や、特に計算機には扱いづらい部分があり、例えば次のような性質はよく知られている：

命題 1 $\mathbf{C} \vdash A \vee B$ だが $\mathbf{C} \nvdash A$ かつ $\mathbf{C} \nvdash B$ となるような論理式 A, B がある。

この性質は「古典論理は disjunction property を持たない」と呼ばれる。

直観主義論理

ブラウワーによる**直観主義論理** (Intuitionistic logic, 以下 $\mathbf{Int}$) は、古典論理より証明力が弱い論理であり、コンピュータと相性のよい性質を多数もつ論理なことから、古典論理に次いで活発な研究対象である。例えば直観主義論理は disjunction property を持つ：

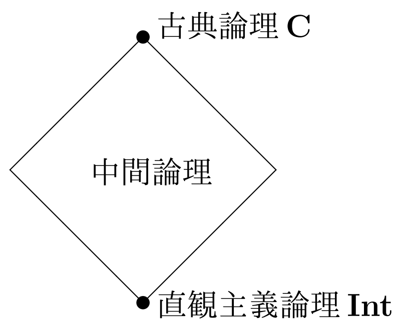
命題 2 任意の論理式 A, B に対して、$\mathbf{Int} \vdash A \vee B$ ならば $\mathbf{Int} \vdash A$ または $\mathbf{Int} \vdash B$ である。

中間論理

disjunction property に代表される直観主義論理の性質を、抽出し研究するため考察されるのが、**中間論理**と呼ばれる体系である。。論理の証明力の強さ、つまり証明できる論理式の集合は任意の中間論理 $\mathbf{L}$ に対し、

$$\mathbf{Int} \subset \mathbf{L} \subset \mathbf{C}$$

が成り立つ。



中間命題論理の部分体系

中間命題論理 $\mathbf{L}$ に対し、その論理記号を $\mathcal{S}$ $(\to \in \mathcal{S} \subseteq \{\to, \wedge, \vee, \neg\})$ に制限した論理を $\mathbf{L}_{\mathcal{S}}$ と書く。

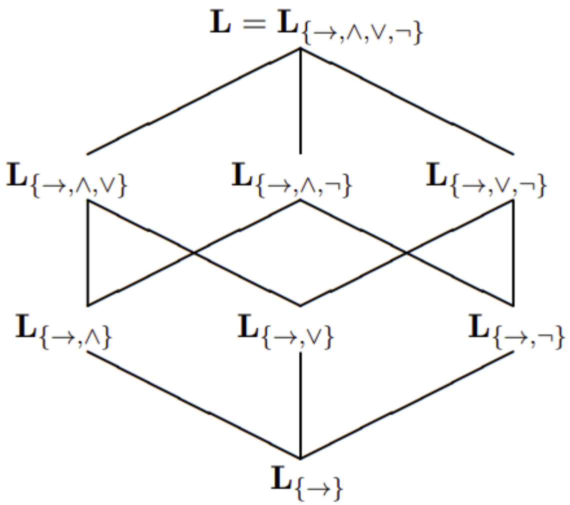


図 1：上にあるほうが論理記号が多い部分体系。

$\mathbf{L}_{\mathcal{S}}$ における証明

$\mathbf{L}_{\mathcal{S}} \vdash A \Longleftrightarrow \mathbf{L} \vdash A$ を示す証明で、論理記号は $\mathcal{S}$ の元のみを使ったものが存在する。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A, \neg A}}{\Rightarrow A \vee \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{B, A \Rightarrow A}}{A \Rightarrow B \to A}}{A \Rightarrow (A \to B) \vee (B \to A)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow}}{\neg A, A \Rightarrow B}}{\neg A, A \Rightarrow B \to A}}{\neg A \Rightarrow (A \to B) \vee (B \to A)}}{A \vee \neg A \Rightarrow (A \to B) \vee (B \to A)}}{\Rightarrow (A \to B) \vee (B \to A)}$$

この証明は $\mathbf{C} \vdash \Rightarrow (A \to B) \vee (B \to A)$ を表すが、証明中に使われている論理記号は $\to, \vee, \neg$ だから

$$\mathbf{C}_{\{\to,\vee,\neg\}} \vdash \Rightarrow (A \to B) \vee (B \to A)$$

を示す証明図だが

$$\mathbf{C}_{\{\to,\vee\}} \vdash \Rightarrow (A \to B) \vee (B \to A)$$

を示す証明図ではない。

$\Downarrow$

考えたいこと：部分体系間の保存拡大

中間命題論理 $\mathbf{L}$ と、$\to \in \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S}' \in \{\to, \wedge, \vee, \neg\}$ に対し、

$$\mathbf{L}_{\mathcal{S}'} \text{ が } \mathbf{L}_{\mathcal{S}} \text{ の保存拡大である}$$

とは、任意の $\mathcal{S}$ 論理式 (論理記号が $\mathcal{S}$ の元だけで構成された論理式)A について次を満たすこと：

$$\mathbf{L}_{\mathcal{S}'} \vdash A \Longrightarrow \mathbf{L}_{\mathcal{S}} \vdash A$$

論理の代数的解釈

中間論理 $\mathbf{L}_{\mathcal{S}}$ における、論理式の証明可能性と同値である論理式の「真偽」を、$\mathcal{S}$ 代数とよばれる最大元 1 をもつ順序集合 (のクラス) によって考察する方法が知られている。
各関数記号のもつ代表的な性質：

($\wedge \in \mathcal{S}$) 任意の 2 点間に最大下界が存在

($\vee \in \mathcal{S}$) 任意の 2 点間に最小上界が存在

($\neg \in \mathcal{S}$) 最小元 0 が存在

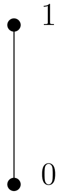


図 2：古典論理 $\mathbf{C}$ に対応する $\mathcal{S}$ 代数、真 (1) と偽 (0) のみで表される。

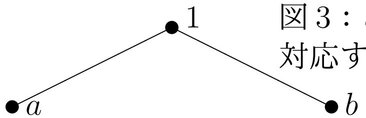


図 3：ある中間論理 $\mathbf{L}_{\{\to,\vee\}}$ に対応する $\{\to,\ \vee\}$ 代数の例

複雑な順序構造を考えることで、様々な中間論理 (とその部分体系) の証明可能性を別視点から考察することができる。

Gödel-Dummett の論理と Avron の弱い部分体系

全順序な代数全体のクラスに対応する中間論理を Gödel-Dummett の論理といい、直観主義論理に新たな公理型 (証明可能と無条件に認める論理式の形) として $(p \to q) \vee (q \to p)$ を加えた形がよく知られている。Avron[1] は、その弱い部分体系として $\mathbf{GLCW}_{\mathcal{S}}$ を定めた。$\mathbf{GLCW}_{\mathcal{S}}$ 代数は 1 を根とする木構造 (ただし根に近いほうが大きいとする) の代数全体のクラスに対応する論理である。

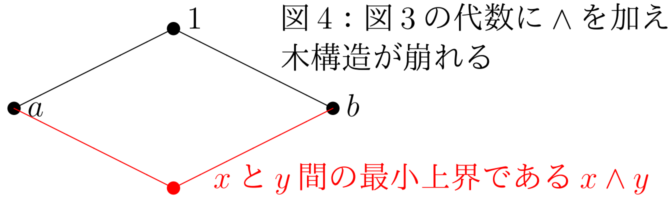


図 4：図 3 の代数に $\wedge$ を加えると木構造が崩れる

$\wedge \in \mathcal{S}$ のとき、$\mathcal{S}$ 代数が木構造であることと順序集合であることは同値であることから、Avron は次の結果を示した：

定理 1 (Wroński, Avron)
$\to \in \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S}' \subseteq \{\to, \wedge, \vee, \neg\}$ に対し、次は同値

1. $\mathbf{GLCW}_{\mathcal{S}'}$ は $\mathbf{GLCW}_{\mathcal{S}}$ の保存拡大
2. $\wedge \in \mathcal{S}$ または $\wedge \notin \mathcal{S}'$

主結果：$\mathbf{GLCW}_{\mathcal{S}}$ の一般化

$\mathbf{GLCW}_{\mathcal{S}}$ 代数の定義は次のように言い換えられる：

各点において自身のすぐ上で比較不能な点の数は 1 点である。($\wedge \in \mathcal{S}$ のとき幅 1 に対応)

これを一般化した $\mathbf{GLCW}^{m}_{\mathcal{S}}$ は次のような代数で定義されるよう決めるのが自然と考えられる：

各点において自身のすぐ上で比較不能な点の数は高々 m 点である。($\wedge \in \mathcal{S}$ のとき幅 n に対応)

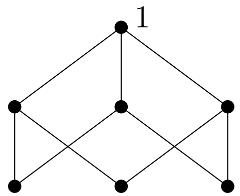


図 5：$\mathbf{GLCW}^{2}_{\{\to,\vee\}}$ 代数の例

定理 2 (主定理) $m \geq 2$ ならば、$\mathbf{GLCW}^{m}_{\{\to,\vee\}}$ は $\mathbf{GLCW}^{m}_{\{\to\}}$ の保存拡大でない *($m = 1$ の場合は保存拡大になることが Avron[1] により示されている)*

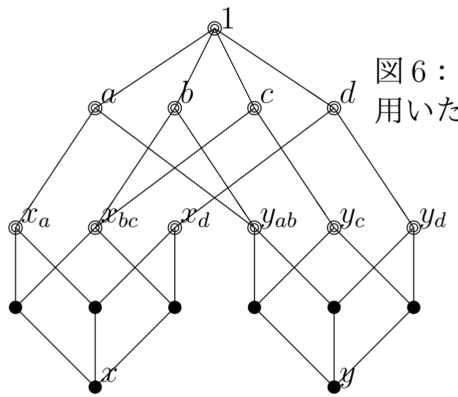
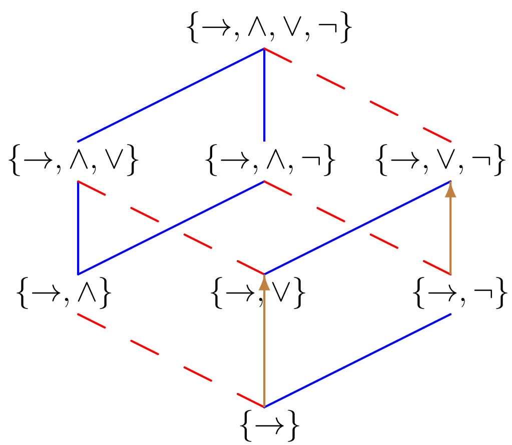


図 6：$m = 3$ の証明で用いた代数構造

まとめ

Gödel-Dummett の論理の弱い部分体系 **GLCW** を一般化した場合、$\vee$ を付け加えた場合の保存拡大性が崩れることが示された。以上を踏まえて保存拡大性を図示すると次のようになる：



常に保存拡大

常に保存拡大でない

$m = 1$ の場合に限り保存拡大

図 7：$\mathbf{GLCW}^{m}_{\mathcal{S}}$ の保存拡大性

参考文献

[1] A. Avron, *Hypersequents, logical consequence and intermediate logics for concurrency*, **Annals of Mathematics and Artificial Intelligence**, vol.4, (1991), pp.225-248.