フルヴィッツ型ゼータ関数の Schur 型への拡張

上智大学 大学院
理工学研究科 理工学専攻 数学領域 博士前期課程 2 年
山本治樹

動機および本研究の位置づけ　整数論における研究対象であるゼータ関数は，数学 (素数) や物理学 (力学系) など，幅広い分野に応用できる関数である．ゼータ関数の応用性の広さが興味深く，ゼータ関数をより理解するために，本研究ではゼータ関数を組合せ論的に拡張し，その性質を研究した．

フルヴィッツ型ゼータ関数

定義 (Riemann ゼータ関数)
$s \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ (\Re(s) > 1).$$

定義 (Bernoulli 多項式)
$n \geq 0$ に対して,

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

定義 (Hurwitz 型ゼータ関数)
$x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $s \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\zeta(s, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s}$$

$$(\Re(s) > 1).$$

フルヴィッツ型ゼータ関数の性質として次が成り立つ.

定理 $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\zeta(1-m, a) = -\frac{B_m(a)}{m}.$$

Schur 型多重ゼータ関数

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r),\ (\lambda_i \in \mathbb{N}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r),$$
$$D(\lambda) := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 | 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

$$SSYT(\lambda) := \left\{ M = \begin{array}{|c c c c c c c|} \hline m_{11} & \leq & m_{12} & \leq & \cdots & \leq & m_{1\lambda_1} \\ \wedge & & \wedge & & \wedge & & \\ m_{21} & \leq & \cdots & \leq & m_{2\lambda_2} & & \\ \wedge & & \wedge & & \wedge & & \\ \vdots & \leq & \vdots & \leq & \vdots & & \\ \wedge & & \wedge & & \wedge & & \\ m_{r1} & \leq & \cdots & \leq & m_{r\lambda_r} & & \\ \hline \end{array} \ \middle|\ \begin{array}{c} m_{ij} \in \mathbb{N}, \\ m_{ij} \leq m_{i(j+1)}, \\ m_{ij} < m_{(i+1)j} \end{array} \right\}$$

定義 (Schur 型多重ゼータ関数) $\boldsymbol{s} = (s_{ij})_{(i,j)\in D(\lambda)} (s_{ij} \in \mathbb{C})$ に対して,

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}) = \sum_{(m_{ij})\in SSYT(\lambda)} \prod_{(i,j)\in D(\lambda)} \frac{1}{{m_{ij}}^{s_{ij}}}.$$

フルヴィッツ型ゼータ関数の Schur 型への拡張と性質 I

フルヴィッツ型ゼータ関数の拡張として以下を導入する.

定義 (Factorial Schur 型多重ゼータ関数) $\boldsymbol{s} = (s_{ij})_{(i,j)\in D(\lambda)}$, $\boldsymbol{x} = (x_{ij})_{(i,j)\in D(\lambda)}$ に対して $(s_{ij} \in \mathbb{C},\ x_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0})$,

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x}) = \sum_{m_{ij}\in SSYT(\lambda)} \prod_{(i,j)\in D(\lambda)} \frac{1}{(m_{ij}+x_{ij})^{s_{ij}}}.$$

主定理 1(Yamamoto, 2021+) $s_{ij} = a_{j-i}$, $x_{ij} = y_{j-i}$ に対して,
$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x}) = \det\left(\zeta\left(a_{(i,j)}|y_{(i,j)}\right)\right)_{1\leq i,j\leq\lambda_1}$ が成り立つ. ここで,

$$\zeta\left(a_{(i,j)}|y_{(i,j)}\right) = \sum_{m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{(m_1+y_{j-1})^{a_{j-1}}\cdots(m_n+y_{j-n})^{a_{1-n}}}$$

$$(n = \lambda' + j - i).$$

フルヴィッツ型ゼータ関数の Schur 型への拡張と性質 II

定義 (Schur 型ベルヌーイ多項式) $\lambda=(h,1^{\ell-1})=(h,1,\cdots,1)$, $\boldsymbol{x}=(x_{ij})$, $\boldsymbol{n}=(n_{ij})$, $\boldsymbol{t}^{\lambda}=(t_{ij})$ に対して $(x_{ij},t_{ij}\in\mathbb{R},\ n_{ij}\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$,
$e^{\boldsymbol{t}^{\lambda}}=e^{\sum_{(i,j)\in D(\lambda)}t_{ij}}$, $\boldsymbol{t}_p^h=(t_{1(p+1)},\cdots,t_{1h})$ とすると,

$$\frac{(e^{\boldsymbol{t}^{\lambda}}-1)^{-1}\prod_{(i,j)\in D(\lambda)}t_{ij}e^{x_{ij}t_{ij}}}{\prod_{p=1}^{\ell-1}(e^{\boldsymbol{t}_p^{1^{\ell}}}-1)\prod_{q=1}^{h-1}(e^{\boldsymbol{t}_q^{h}}-1)}=\sum_{\boldsymbol{n}=0}^{\infty}\mathbb{B}^{\lambda}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{t}^{\lambda}}(\boldsymbol{x})\prod_{(i,j)\in D(\lambda)}\frac{t_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!}.$$

主定理 2(Yamamoto, 2021+) $\boldsymbol{m}=(m_{ij})$ に対して $(m_{ij}\in\mathbb{N})$

$$\zeta_{\lambda}(1-\boldsymbol{m}|\boldsymbol{a})=\prod_{(i,j)\in D(\lambda)}\frac{(-1)^{(m_{ij}-1)}\mathbb{B}^{\lambda}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{t}^{\lambda}}(-\boldsymbol{a})}{m_{ij}}.\quad (a_{ij}\in\mathbb{R}_{\geq 0})$$