拡散過程の準定常分布について

山戸康祐
京都大学大学院理学研究科D3
日本学術振興会特別研究員(DC2)

研究分野:
確率過程論を研究しています. 確率過程とはランダムネスを含む系の時間発展を記述する数学的なモデルです.

研究内容:
一次元拡散過程の準定常分布への収束を研究しています.
準定常分布とは死滅を含む確率過程において, 死滅が起こっていないという条件付けの下で定常性を示す分布のことです.
死滅を伴う系におけるある種の平衡状態を表す分布と考えることができ, 例えば, 生物の個体数の変動を表すモデルに応用されます.

研究分野

確率過程論

・ランダムネスを含む系の時間発展を研究する分野

確率過程の例:

・ランダムウォーク, ブラウン運動

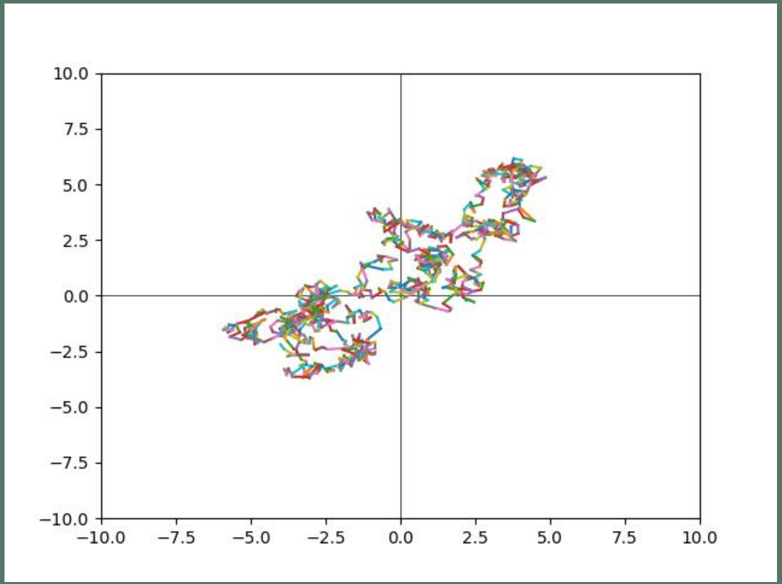
・待ち行列

・結晶の成長モデル

確率過程の応用例:

・保険

・ファイナンス



ブラウン運動のパスの一例

研究内容

一次元拡散過程の準定常分布の研究

- **拡散過程…**
  連続な道をもつ時間的一様な強マルコフ過程
  (例: ブラウン運動)

- **準定常分布…**
  死滅をもつ確率過程において, 死滅が起こらないという条件付けの下での定常分布

$$\mathbb{P}_\nu[\, X_t \in dy \mid \zeta > t \,] = \nu(dy) \quad (\, \forall t > 0 \,)$$

(X_t: 確率過程, ζ: 生存時間, ν: 準定常分布)

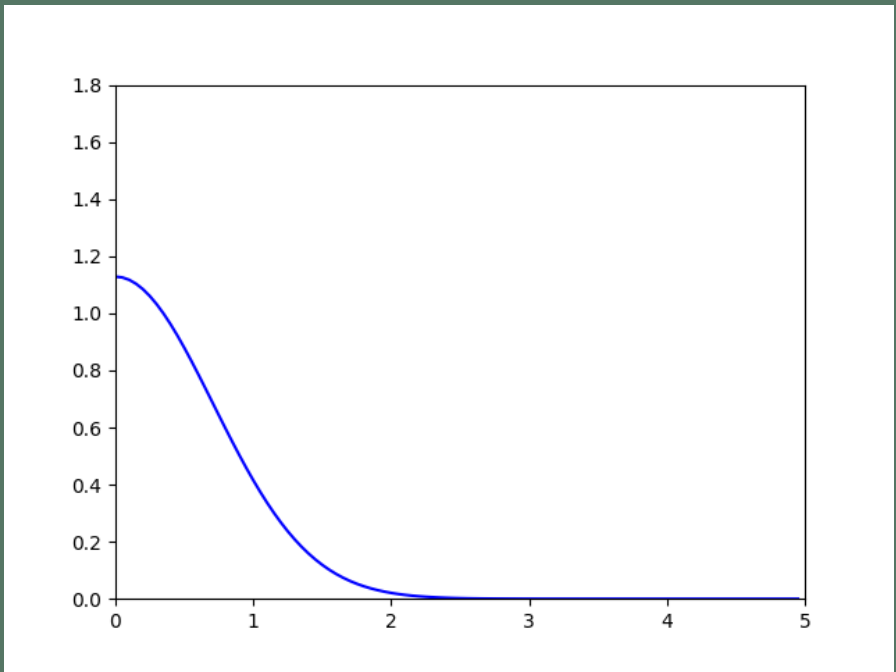
[cf. 定常分布: $\mathbb{P}_\mu[Y_t \in dy] = \mu(dy)$]

定常分布と準定常分布

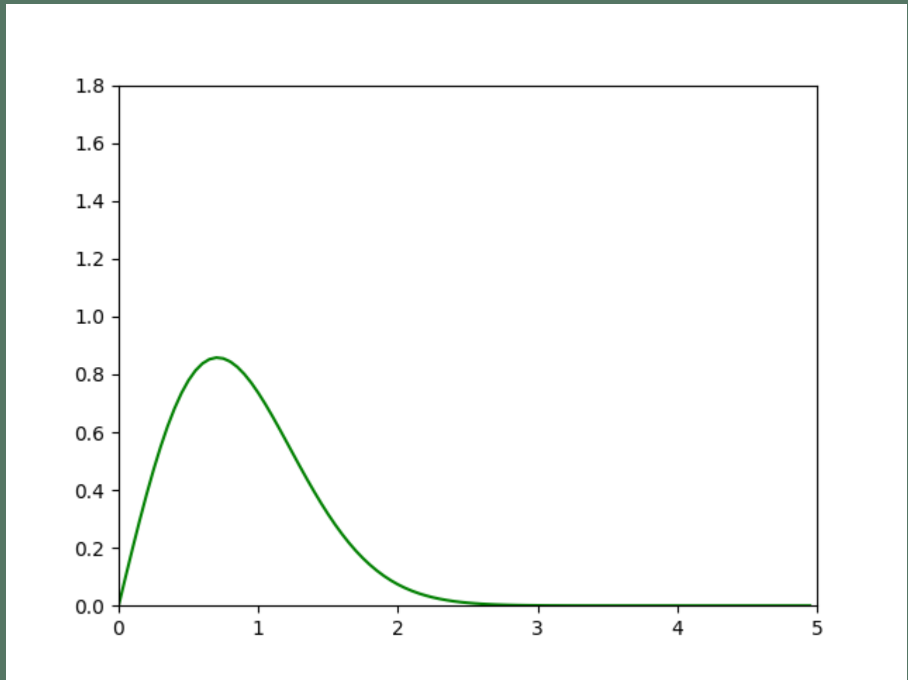
例: Ornstein-Uhlenbeck過程 on $[0,\infty)$ (グラフは $\beta = 1$)

$$dX_t = dB_t - \beta X_t dt$$

・定常分布(原点で反射)



・準定常分布(原点で死滅)



得られた結果

境界で死滅する一次元拡散過程に対し以下を得た:

- 最小到達一意性(FHU)という概念を導入：

  「(ある初期分布の集合) $\ni \mu \mapsto \mathbb{P}_\mu[T \in dt]$」が単射

  (T: 境界への到達時刻)

- FHUの下で, 準定常分布への収束は到達時間の裾の挙動に帰着できることを示した.
- ドリフト付きクンマー過程の準定常分布への収束を示した.

$$dX_t = \sqrt{2X_t}dB_t + \left(-\alpha + 1 - \beta X_t + \frac{x g_\gamma{}'(X_t)}{g_\gamma(X_t)}\right)dt$$

$$(\ \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, \gamma \geq 0\ )$$

K. Yamato "A unifying approach to non-minimal quasi-stationary distributions for one-dimensional diffusions" arXiv:2012.12971