移流項付き一般化平均曲率流の強解の存在について

森 龍之介 (東京工業大学, 研究員), 富松 瑛太 (東京工業大学), 利根川 吉廣 (東京工業大学)

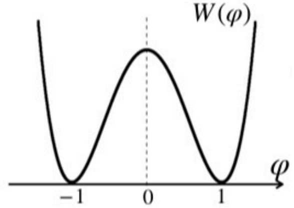
研究の動機 相分離過程を表す数理モデル

移流項付き拡散界面方程式

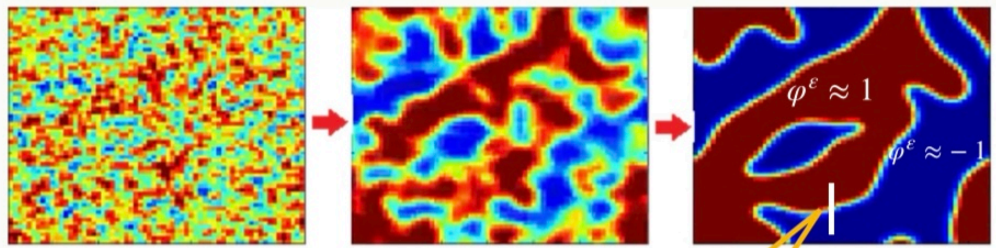
(0) $$\partial_t \varphi^\varepsilon = \Delta \varphi^\varepsilon + u \cdot \nabla \varphi^\varepsilon + \varepsilon^{-2} f(\varphi^\varepsilon) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

（移流ベクトル u は既知）

$f(\varphi) := -W'(\varphi)$

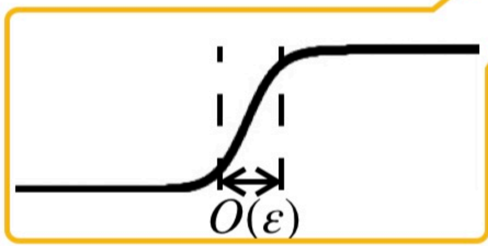


Time develops



http://www.math.titech.ac.jp/~tonegawa/researchjp.htm

profile of $\varphi^\varepsilon(x,t)$



$\varepsilon \searrow 0$

$$M_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \{ x \mid \varphi^\varepsilon(x,t) = 0 \}$$

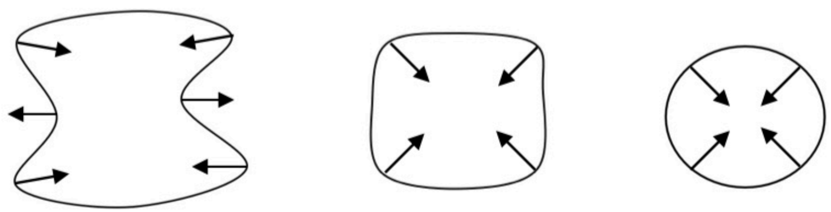
移流項付き平均曲率流

(1) $$v = h + u^\perp \quad \text{on} \quad M_t,\ t > 0$$

- v : **法方向速度**,
- h : **平均曲率ベクトル**,
- $u^\perp = (u \cdot n) n$,
  n : **法方向ベクトル**

平均曲率流($u \equiv 0, n = 2$)

Time develops



(1)の解の挙動を調べるために,
解の存在や滑らかさを知りたい！

研究の背景

移流項付き拡散界面方程式

$$(0)\quad \partial_t \varphi^\varepsilon = \Delta\varphi^\varepsilon + u\cdot\nabla\varphi^\varepsilon + \varepsilon^{-2} f(\varphi^\varepsilon)\quad \text{for}\ \ x\in\mathbb{R}^n,\ t>0.$$

（移流ベクトル u は既知）

$\varepsilon \searrow 0$

$$M_t = \lim_{\varepsilon\to 0}\{x \mid \varphi^\varepsilon(x,t)=0\}$$

移流項付き平均曲率流

$$(1)\quad v = h + u^\perp \ \ \text{on}\ \ M_t,\ t>0$$

- v : **法方向速度**,
- h : **平均曲率ベクトル**,
- $u^\perp = (u\cdot n)n$,
  n : **法方向ベクトル**

解のクラスを測度に拡張

$$\mu_t = \theta \mathscr{H}^{n-1}\lfloor_{M_t}$$

移流項付き一般化平均曲率流

$$(2)\quad \frac{d}{dt}\int \phi\, d\mu_t \le \int \{(\nabla\phi - \phi h)\cdot v + \partial_t\phi\}\, d\mu_t$$

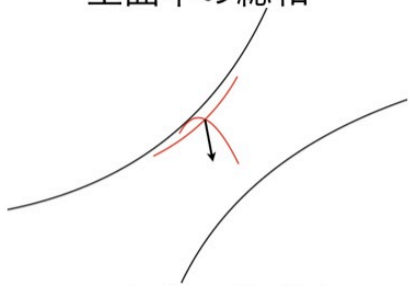
for all smooth $\phi = \phi(x,t) \ge 0$,

and $v = h + u^\perp$.

- $v \in L^2(d\mu_t dt)$: **一般化法方向速度**,
- $h \in L^2(d\mu_t dt)$: **一般化平均曲率ベクトル**,
- $u^\perp = (u\cdot n)n$,
  n : **一般化法方向ベクトル**

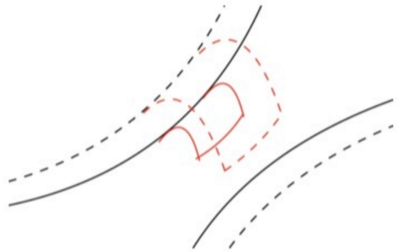
平均曲率

主曲率の総和



一般化平均曲率

摂動に対する面積変化率



移流ベクトル u が連続であっても

(1)の(古典)解が存在するとは限らない.

一方, (2)の弱解の存在は

u の適当な可積分性から従う.

(Takasao-Tonegawa 2016.)

さらに, 多重度が1 $(\theta = 1)$ の場合には

$M_t = \operatorname{spt}\mu_t$ は局所的に$C^{1,\alpha}$級関数の

グラフで与えられることも示される.

(Kasai-Tonegawa 2014.)

しかし, M_t が(1)を満たすためには

tに関しては1階微分,

xに関しては2階微分

が必要である.

問. (2)の弱解$M_t = \operatorname{spt}\mu_t$が

ほとんど至るところで

(1)をみたす条件は何か.

仮定

・$\exists C^{1,\alpha}$級関数 $f : (x,t) \in B_1 \times (0,1) \to \mathbb{R}$,

$M_t = \{(x, f(x,t)) \mid x \in B_1\} \subset \mathbb{R}^n$ (B_1: 単位球)

・移流ベクトル u は次をみたすとする.

$$\|u\|_{L^{p,q}}^q = \int_0^1 \left(\int |u|^p \, d\mu_t\right)^{\frac{q}{p}} dt < \infty,$$

$$p, q \in [2,\infty),\ \alpha := 1 - \frac{n-1}{p} - \frac{2}{q} > 0.$$

注. ・$d\mu_t = \sqrt{1 + |\nabla f(x,t)|^2}\, dx$

・M_t の法方向ベクトル n,

一般化平均曲率ベクトル $h \in L^2(d\mu_t dt)$

はそれぞれ次で与えられる.

$$n = \frac{(-\nabla f, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}},\ \ h = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\right) n$$

結果

定理1. 左記の仮定のもとで

$\{\mu_t\}_{t \in (0,1)}$ は一般化曲率流(2)を満たすとする.

このとき$\partial_t f$ が $B_1 \times (0,1)$ 上のRadon測度ならば

$\|\partial_t f\|_{L^{p,q}} < \infty$, $\|\nabla^2 f\|_{L^{p,q}} < \infty$ がしたがう. また,

$B_1 \times (0,1)$ 上のほとんど至るところで次が成り立つ.

$$(3) \quad \frac{\partial_t f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\right) + u \cdot \frac{(-\nabla f, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$$

系2. $\gamma > 2,\ \beta > \dfrac{n\gamma}{2(\gamma - 1)}$ ($\beta \geq 4/3$ in addition if n = 2)

とする. このとき, 移流 $u \in L^\gamma_{loc}([0,\infty); (W^{1,\beta}(\mathbb{R}^n))^n)$ と

有界な C^1 級超曲面 $M_0 = \partial\Omega_0$ に対して

ほとんど全ての点で(1)をみたす $C^{1,\alpha}$ 級 $\{M_t\}_{t \in (0,T)}$ で,

C^1 の位相で $\lim_{t \to 0} M_t = M_0$ となるものが存在する.

定理1のアイデア(M_t が滑らかな場合)

① (2)をtに関して積分すると

$$0 \le \int_0^1 dt \int \{(\nabla \phi - \phi h) \cdot (h + u^{\perp}) + \partial_t \phi\} d\mu_t$$

for $\phi \in C_c^1((B_1 \times \mathbb{R}) \times (0,1); \mathbb{R}_+)$.

② この不等式から次をみたす Radon測度 ξ の存在がしたがう.

$$\mathrm{spt}\,\xi \subset \cup_{t \in (0,1)} M_t \ ,$$

$$\int_0^1 dt \int \{(\nabla \phi - \phi h) \cdot (h + u^{\perp}) + \partial_t \phi\} d\mu_t = \xi(\phi)$$

for $\phi \in C_c^1((B_1 \times \mathbb{R}) \times (0,1))$.

③ $M_t = \mathrm{spt}\,\mu_t$ の符号付距離関数$d(x,t)$,

$\varphi \in C_c^1(B_1 \times (0,1))$ に対して$\phi = \varphi d$ を

②に代入すると

$$\int_0^1 dt \int_{B_1} \varphi n \cdot \{h + u^{\perp}\} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} - \varphi \partial_t f dx dt = 0.$$

系2の別証

補題1.

$C^{1,\alpha}$ 級の超曲面$M_t = \{(x, f(x,t)) \mid x \in B_1\}$

に対して $\partial_t f, \nabla^2 f \in L^2(B_1 \times (0,1))$ ならば次がしたがう.

$$\int_0^1 dt \int \{(\nabla \psi - \psi h) \cdot v + \partial_t \psi\} d\mu_t = 0$$

for $\psi \in C_c^1((B_1 \times \mathbb{R}) \times (0,1))$.

ただし $v := \dfrac{\partial_t f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} n, \ \ n = \dfrac{(-\nabla f, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$.

補題2. 系2の仮定のもとで拡散界面方程式(0)のある解φ^{ε}の$\varepsilon \to 0$における極限で得られる(2)の弱解

$$\mu_t = \mathscr{H}^{n-1} \lfloor_{M_t} \ \ (t \in (0,T))$$

は各点の近傍で補題1の仮定をみたす. また, C^1の位相で$lim_{t \to 0} M_t = M_0$ が成り立つ.

今後の展開

- 実は，系2の別証における補題1はcodimensionが一般の場合にも成り立つ.

補題1'. $C^{1,\alpha}$ 級の超曲面$M_t = \{(x, f(x,t)) \mid x \in B_1 \subset \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ に対して $\partial_t f, \nabla^2 f \in L^2(B_1 \times (0,1))$ ならば次がしたがう.

$$\int_0^1 dt \int_{M_t} \{(\nabla \psi - \psi h) \cdot v + \partial_t \psi\} d\mathscr{H}^n = 0$$

$$\text{for } \psi \in C_c^1((B_1 \times \mathbb{R}^k) \times (0,1)).$$

ここで v は法方向速度, h は平均曲率ベクトルである.

- ギンツブルグ・ランダウ方程式

$$\partial_t \Phi = \Delta \Phi + u \cdot \nabla \Phi + \varepsilon^{-2}(1 - |\Phi|^2)\Phi$$

の解$\Phi^\varepsilon \in C^{2,1}(\mathbb{R}^{n+k} \times [0,\infty); \mathbb{R}^k)$に対しても $\varepsilon \to 0$における極限で補題2と同様の結果が示されれば(2)の強解の存在を一般余次元の場合に拡張できる

n=1, k=2 の場合