一般化前射影代数の表現論とその応用

2021年 11月13日

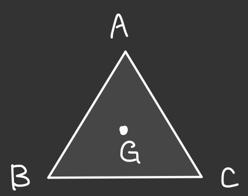
村上 浩大 (京都大学 理学研究科)

自己紹介と研究の動機

専門 表現論 (representation theory)
≒ いろいろな概念の対称性に注目して、それらを統合的に扱う分野

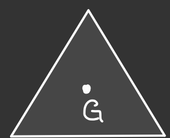
対称性…適当な操作をほどこしても保たれるような性質のこと。

例).



正三角形

Gのまわりで、±120°何回か回転させる。



正三角形に重なる。

注) 正三角形だけ回転させておもしろいという人はあまりいない(かもしれない)

この例は抽象的には次のように言い換えられる。

$$n+3\mathbb{Z} \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^n$$

(3でわった余りの集合) (Gの周りで120°の倍数回転)

たし算 $\xrightarrow{\text{対応}}$ 行列のかけ算

- 正三角形を回しても喜べないのは、$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ のたし算が簡単な気がして、上の対応が自明に見えてしまうことに依っている。(たぶん)

この下で、対称性について考えることとは

何か演算を備えた(一般には無限)集合 A $\longrightarrow$ 何か数学的な操作で閉じている構造物 X の上の操作 $\mathrm{End}_A(X)$

演算 $\longrightarrow$ 操作

という対応を考えることだと言い換えられる。

- この picture の下で A を対称性、X をその実現と呼ぶことにする。

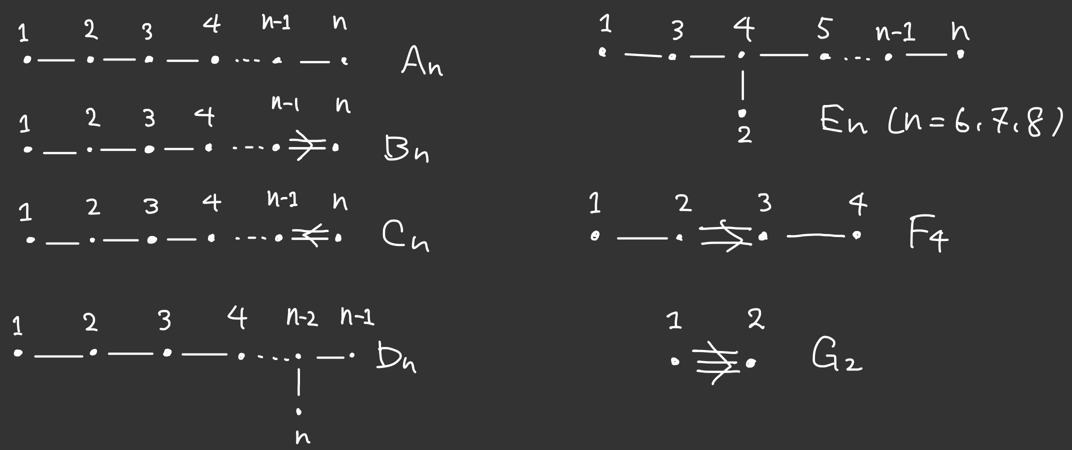
⇝ 興味の例

- A を実現するような X たちを(適当な同一視の下で)分類できないか?
- A の異なる実現 X と X′ があったときに、X と X′ を比較することで A への理解を深められないか?
- X に関係する異なる対称性 A と A′ があったときに、X を調べることで、A と A′ の関係への理解を深められないか?

今日は、Dynkin 図形と呼ばれるグラフから現れる色々な対称性(Weyl群, 量子群)を一般前射影代数の表現論と結びつけて理解するということを説明したい。

さて、我々が考える対称性について言及したい。
対称性として思い浮かべやすいものとして有限単純群（＝位数が有限で非自明な部分群をもたない群）があると思う。しかし、有限単純群の分類は非常に難しいことが知られていて、多くの人の貢献による，約16000ページにおよぶとされるその証明をまとめ，出版する作業は2021年現在も終わっていない（はずである）。

このように，あまり条件を課さずに広い対称性を扱おうとすると，具体的な分類に基づいて対称性を理解することが難しくなってしまう。それに比べ，ずっと全体像の分かりやすい，ほどよいクラスの群として，コンパクトLie群（compactな多様体の構造をもつ群で，演算と逆元を取る操作が滑らかな群．よくわからなくても特に問題ない）がある。このクラスの群の分類は，単純Lie代数と呼ばれる代数系の分類と同値であり，それは以下のDynkin図で与えられる．



このDynkin図形は，添え字の集合をIとして，$(i,j)\in I\times I$に対し，

・$C_{ii}=2$.

・ iとjを結ぶ辺がない

$\underset{i}{\bullet}\quad\underset{j}{\bullet}$　$c_{ij}=c_{ji}=0$；　$\underset{i}{\bullet}\Rightarrow\underset{j}{\bullet}$　$c_{ij}=-1,\ c_{ji}=-2$

$\underset{i}{\bullet}\!-\!\!\!-\underset{j}{\bullet}$　$c_{ij}=c_{ji}=-1$；　$\underset{i}{\bullet}\Rrightarrow\underset{j}{\bullet}$　$c_{ij}=-1,\ c_{ji}=-3$

というルールによって，Cartan行列と呼ばれる行列に言い換えられる．例えば，

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \bullet\!-\!\!\!-\bullet \;\; A_2 \qquad\qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \bullet\!-\!\!\!-\bullet\Rightarrow\bullet \;\; B_3$$

という対応がある．

これらの行列は，A,D,E型の場合は対称行列（i.e. 転置をとっても変わらない）であり，B,C,F,G型の場合は，対称化可能（i.e. 適当な対角行列を左からかけて，対称行列にできる）である．これらのDynkin図形やCartan行列の分類に付随する対称性は20世紀以降数多く研究されており，研究の方法論や対象は変われど，これらの分類にともなって数学的な興味が提供されるという部分は変わっていない．

次頁から，この行列のデータを経由して，種々の対称性を定め，それらの関係を見ていく．

一般化前射影代数の加群圏について

一般化前射影代数は, 対称化可能 Cartan 行列 $C=(c_{ij})$ と, $DC={}^{T}(DC)$ を与える対角行列 $D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$ を用いて, 次の有向グラフによって定義される.

① C のサイズ分だけ点 $\overset{i}{\cdot}$ をかく.

② $c_{ij}<0 \implies i$ と j の間に矢印 $\overset{i}{\cdot} \underset{\alpha_{ij}}{\overset{\alpha_{ji}}{\rightleftarrows}} \overset{j}{\cdot}$ をかく.

③ 各点にループ $\underset{i}{\cdot}\circlearrowleft^{\varepsilon_i}$ をかく.

この図形に矢印に従って点を移動するという道を定めることができ, 経由した矢印の本数のことを道の長さという (点は長さ 0 の道とする)

⇝ このとき, 道を基底とする $\mathbb{C}$ 上の線型空間には, 矢印での移動から定まる積による (非可換) 環の構造が入る.

この環に次の関係式 (P1)〜(P3) を要請したものを一般化前射影代数という. ($\Pi(C,D)$ と書くことにする)

$$(\mathrm{P1})\quad \varepsilon_i^{c_i}=0$$

$$(\mathrm{P2})\quad \varepsilon_i^{c_{ji}}\alpha_{ij}=\alpha_{ij}\varepsilon_j^{c_{ij}}$$

$$(\mathrm{P3})\quad \forall i\in I,\ \sum_{c_{ij}<0}(-1)^{j-i}\,\varepsilon_j^{c_{ij}-1-k}\alpha_{ji}\alpha_{ij}\varepsilon_j^{k}=0.$$

例). $C=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&2\end{pmatrix}$ $\quad D=\begin{pmatrix}2d&0\\0&d\end{pmatrix}$

$$\varepsilon_1\circlearrowright \underset{1}{\cdot}\ \underset{\alpha_{12}}{\overset{\alpha_{21}}{\rightleftarrows}}\ \underset{2}{\cdot}\circlearrowleft \varepsilon_2$$

(P1) $\varepsilon_1^{2d}=0$, $\varepsilon_2^{d}=0$. $\quad$ $d=1$ なら ε_2 はムシできる

(P2) $\varepsilon_1^2\alpha_{12}=\alpha_{12}\varepsilon_2$, $\varepsilon_2\alpha_{21}=\alpha_{21}\varepsilon_1^2$

(P3) $\alpha_{12}\alpha_{21}\varepsilon_1+\varepsilon_1\alpha_{12}\alpha_{21}=0.$

$\alpha_{21}\alpha_{12}=0.$

この設定の下, 一般化前射影代数は $\mathbb{C}$ 上有限次元である.

有限次元代数の有限生成な加群は, 直既約分解が同型と順番を除いて一意であるという Krull-Schmidt-Azumaya の定理が知られている. すなわち, M を有限生成 $\Pi(C,D)$-加群としたとき,

直既約 $\Pi(C,D)$-加群

$$M\simeq M_1\oplus\cdots\oplus M_k \qquad (M_i \text{ はそれ以上 } M'_{i_1}\oplus M'_{i_2} \text{ の形に分けられない})$$

直既約という.

の形に unique に分解できる.

したがって, 直既約な $\Pi(C,D)$-加群を"全て"分類し, それらの間の準同型を"全て"分類できれば, $\Pi(C,D)$ の表現論は理解できたと言える. しかし, そのような分類が可能な代数は一般にはほとんどないことが知られている.

そこで, $\Pi(C,D)$ 上の加群のうち特別なものに着目し, それらの対称性に注目したい. 単純 Lie 代数の表現論と非常に関わりの深い群として Weyl 群と呼ばれる群が知られている. この群は, $\{s_i \mid i\in I\}$ で生成され,

$$s_i^2=\mathrm{id}\ ;\ s_is_j=s_js_i\ (c_{ij}=0)\ ;\ s_is_js_i=s_js_is_j\ (c_{ij}c_{ji}=1)$$

$$s_is_js_is_j=s_js_is_js_i\ (c_{ij}c_{ji}=2)\ ;\ s_is_js_is_js_is_j=s_js_is_js_is_js_i\ (c_{ij}c_{ji}=3)$$

を関係式にもつ群である. (関係式から $s_i^2=\mathrm{id}$ を除いたものを Braid 群という)

(たとえば A 型のときは Weyl 群は互換で生成される対称群のことである)

点 i に対応する長さ 0 の道

さて, $\Pi(C,D)$ のイデアル I_i を $I_i:=\Pi(1-e_i)\Pi$ で定めよう. このとき, Weyl 群と両側イデアルのなす半群には,

Weyl 群 $\qquad\qquad$ 両側イデアルの半群.

$$W\ni w=\underbrace{s_{i_1}\cdots s_{i_\ell}}_{\text{最短の表示}}\ \overset{1:1}{\longmapsto}\ I_{i_1}\cdots I_{i_\ell}=:I_w\in\langle I_1,\cdots,I_n\rangle$$

という全単射が存在し, これは最短表示の選び方によらない

この下で次の定理を得る.

$\Pi(C,D)$-加群の集まりで, 部分加群と拡大で閉じたもの (i.e. $0\to L\to M\to N\to 0$, $M\in\mathcal{C}_w\Rightarrow L\in\mathcal{C}_w$; $L,N\in\mathcal{C}_w\Rightarrow M\in\mathcal{C}_w$)

Thm [M]

$$W\ \overset{1:1}{\longrightarrow}\ \mathrm{torf}\ \Pi(C,D).$$

$$w\longmapsto \mathcal{C}_w:=\mathrm{Sub}(\Pi/I_w)=\{M\mid M\overset{\exists}{\hookrightarrow}(\Pi/I_w)^{\oplus\exists m}\}$$

このことから $\Pi(C,D)$ の表現論を Weyl 群が形作っている. 次頁でこれを更に別の代数系 (量子群) と結びつけたい.

結晶基底と一般化前射影代数

　さて，ここからは Lie 代数の量子化である量子群について紹介する．正確な定義は与えないが，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とは，$\mathbb{C}$ 上の線型空間であって，Lie 括弧 $[\,,\,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ とよばれる演算を備えた代数系である．その表現論は普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ という非可換代数上の加群の研究と同一視される．さて，$U(\mathfrak{g})$ は $\mathbb{C}$ 上線型空間の構造が入るため，その基底を考察することは基本的である．ここで，次の定理がよく知られている．

Thm (Poincaré - Birkhoff - Witt)

$\mathfrak{g}$: Lie algebra，$\{x_1, x_2, \cdots\}$: $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底

$\Longrightarrow$ $\{x_{i_1}^{c_1}\cdot\cdots\cdot x_{i_k}^{c_k}\ ;\ i_1<\cdots<i_k,\ c_1,\cdots,c_k\geq 0\}$ は $U(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{C}$ 上の基底をなす．

つまり，$\mathfrak{g}$ の基底を1つ指定すれば，$U(\mathfrak{g})$ の基底が1つ得られるという定理である．しかし，この基底は $\mathfrak{g}$ の基底の選び方に依存しているため，必ずしも $U(\mathfrak{g})$ の加群を扱う上で，性質の良い物であるとは限らない．そこで，$U(\mathfrak{g})$ やその q 変形である量子群 "$U_q(\mathfrak{g})$" の基底で，何か特徴付けを備えたものを研究することが，1つの大きな問題である．その特徴付けを一般化前射影代数を用いて作ろうというのがここでやりたいことである．

　さて，ここで扱う基底は柏原により導入された，結晶基底と呼ばれるものである．(定義は与えないが，多くの教科書が出版されているので，ご興味があればそちらを参照してほしい)
結晶基底の記述に関して，次が知られている．

Thm (Lusztig，斉藤) $\mathbf{i}=(i_1,\cdots,i_\ell)$: Weyl 群の元 $s_{i_1}\cdots s_{i_\ell}$ の index で ℓ が最大

$U_q(\mathfrak{g})$ へは Braid 群が $\mathbb{Q}(q)$-自己同型として作用し，結晶基底の元は，

$F(\beta_{\mathbf{i},k}) := T_{i_1}\cdot\cdots\cdots T_{i_{k-1}}(e_{i_k}) \in U_q(\mathfrak{g})$ という元を用いて，

Chevalley 生成元という

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell}\ni(a_1,\cdots,a_\ell)\xmapsto{1:1}(F(\beta_{\mathbf{i},1}))^{a_1}\cdots(F(\beta_{\mathbf{i},\ell}))^{a_\ell}\equiv b_{\mathbf{i},a}\in\underbrace{B(-\infty)}_{\text{結晶基底}}$$

と同一視される．

つまり，結晶基底の元 b は，Weyl 群の最長元の最短表示の選び方 $\mathbf{i}$ を指定すれば，ℓ 個の非負整数の組 a と同一視される．この a を b の $\mathbf{i}$-Lusztig data という．

　さて，一般化前射影代数と結晶基底の関係を述べよう．結晶基底は，特別な $\Pi(C,D)$-加群からなる "多様体" の特別な部分多様体のなす集合と 1 : 1 対応する．

$\Pi(C,D)$-加群 $M=\bigoplus_{i\in I}e_iM$
(e_iM : $\langle\varepsilon_i\rangle$ 上の自由加群)
で $(\mathrm{rank}\,e_1M,\cdots,\mathrm{rank}\,e_nM)=\mathbf{r}$ をみたすものから作った "多様体"

Thm [Geiss - Leclerc - Schröer, 2018].

$$B(-\infty)\ni b\xmapsto{1:1}Z_b\in\coprod_{\mathbf{r}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^n}\mathrm{Irr}^{\max}(\Pi(\mathbf{r}))$$

$\Pi(\mathbf{r})$ という "多様体" の既約な "部分多様体" で次元が最大なもの．の集合．

この下で，我々は $\mathbf{i}$-Lusztig data を加群から復元する次の定理を得る．

Thm [M]

先の $B(-\infty)\ni b$ に対応する Z_b の生成点 (= 適切な稠密開集合に含まれる点.) を与える $\Pi(C,D)$-加群 M は，$\mathbf{i}=(i_1,\cdots,i_\ell)$ という Weyl 群の最長元の任意の最短表示に対して，

$$M=M_0\supset M_1\supset\cdots\supset M_\ell=0$$

$$\text{s.t.}\quad M_j/M_{j+1}\simeq I_{i_1}\cdot\cdots\cdot I_{i_j}\otimes\boxed{E_{i_{j+1}}}^{\oplus a'_{j+1}}\qquad(j=0,\cdots,\ell-1)$$

$\in\mathrm{Sub}(\Pi/I_{i_1}\cdot\cdots\cdot I_{i_{j+1}})$

$\mathbf{r}=(0,\cdots,\underset{i_{j+1}\text{-th}}{1},\cdots,0)$ をみたす加群

という列が存在する．

とくに，$(a'_1,\cdots,a'_\ell)$ は b の $\mathbf{i}$-Lusztig data と一致する．

　Dynkin 図形により分類された異なる対称性が互いに関係づけられるということが伝えられていれば幸いです．ありがとうございました!!