相関数が特異点を持つ振動積分の漸近解析

九州大学数理学研究院准教授 神本丈
九州大学大学院数理学府博士 1 年 水野宏真 (発表者)

令和 3 年 11 月 13 日 異分野・異業種研究交流会 2021

研究紹介

数学の調和解析や偏微分方程式などに現れる振動積分と呼ばれる積分によって定義された関数についての研究を行っている．通常，振動積分の解析において最も興味が持たれるのは変数が非常に大きな場合に振動積分がどのような振る舞いをするのかという漸近挙動である．このような漸近挙動については，振動積分の被積分関数の一部が解析関数である場合についてよく研究されているが，本研究はこれを有理関数 ($\frac{1}{x^k}$ のような分数のような形をした関数) の場合への拡張を試みたものである．

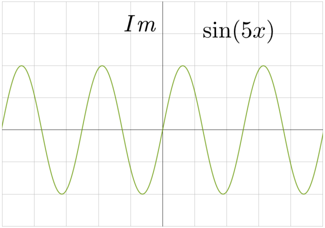
振動積分とは

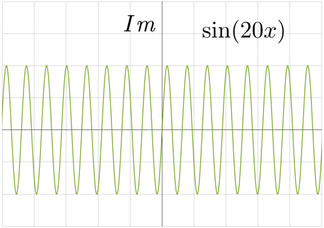
定義 (振動積分)

f, φ を n 変数の滑らか (無限回微分可能) な実数値関数とし, さらに φ は $[-R, R]^n$ の外では 0 であるとする. これらに対し, 次のような積分で定義された関数 $I(t)$ を振動積分という.

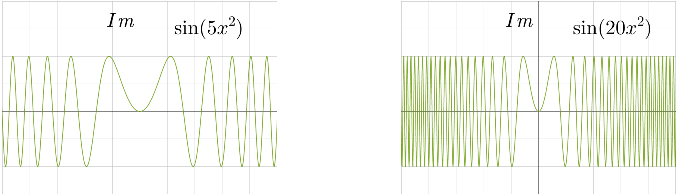
$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{itf(x)} \varphi(x) dx$$

- f を相関数, φ を振幅関数という.
- $f(x) = x$, $\varphi(x) = 1$ の場合の $I(5), I(20)$ の虚部のグラフ
  t が大きくなるにつれて面積が相殺され, $I(t) \to 0$ となる.





- $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=1$ の場合の $I(5), I(20)$ の虚部のグラフ
  $f(x)=x$ の場合に比べ, $x=0$ 付近での相殺が小さい.



$f'(x_0)=0$ となる点 **(critical point)** があるかどうかで漸近挙動が大きく変わる.

定理 (E.Stein;Harmonic Analysis など)

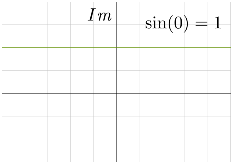
$k\in\mathbb{N}$ とする. また, f は $f(0)=f'(0)=\cdots f^{(k-1)}(0)=0$ かつ $f^{(k)}(0)\neq 0$ を満たすとする. このとき, $I(t)$ は $t\to\infty$ において次のような漸近展開を持つ.

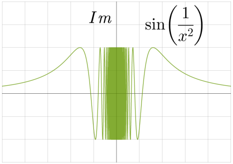
$$I(t)\sim t^{-1/k}\sum_{j=0}^{\infty}a_j t^{-j/k}$$

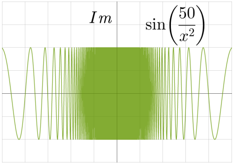
- 「f を何回微分すれば 0 にならなくなるか」ということも漸近挙動に大きく影響している.

f が $x = 0$ で ∞ に発散するような特異点を持つ場合, $I(t,\alpha) = \int_0^R e^{it\frac{1}{x^\alpha}} \varphi(x) dx$

- $\alpha = 2, \varphi(x) = 1$ の場合の $I(0,2), I(1,2), I(50,2)$ の虚部のグラフ.







- $t \to \infty$ の場合は非常に早く減少する. ($f'(x) \neq 0$ のときと同じ)
  $\to$ 気になるのは $t \to 0$ の場合.
- $I(t,\alpha)$ は $t = 0$ で無限回微分可能ではない.
  - $\dfrac{d^k}{dt^k} I(t,\alpha) = i^k \displaystyle\int_0^R e^{it\frac{1}{x^\alpha}} \frac{\varphi(x)}{x^{k\alpha}} dx$ は $k\alpha > 1$ の場合発散してしまう.

  $\to t \to 0$ での漸近展開で自然数冪以外の項が現れる.

問題

$t \to 0$ のとき $I(t,\alpha)$ はどれくらい滑らかな関数でなくなっているのか?

定理

$t \to 0$ において $I(t, \alpha)$ は以下のような漸近展開を持つ.

$$I(t,\alpha) \sim t^{1/\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} A_{\alpha,j} t^{j/\alpha} + \sum_{j=1}^{\infty} B_{\alpha,j} t^j \log t + E(t)$$

- $E(t)$ は $E(0) = \int_0^R \varphi(x)dx$ を満たす滑らかな関数.
- 係数 $A_{\alpha,j}$, $B_{\alpha,j}$ は α, ガンマ関数 $\Gamma(-\frac{j+1}{\alpha})$, $\varphi^{(j)}(0)$ などによって表される.
  →特に $\varphi(0) \neq 0$ であれば $t^{1/\alpha}$ の項は必ず現れる.
- $\alpha = 1$ の場合でも $t^j \log t$ の項が現れるため $I(t, 1)$ は滑らかな関数とはならない.

- $I(t, \alpha)$ は相関数の特異性が $t^{j/\alpha}$ と $t^j \log t$ の項として現れる.
- α が大きいほど $t^{j/\alpha}$(非整数冪) の項がより多く現れる.