極大面上の特異点とそれらの性質

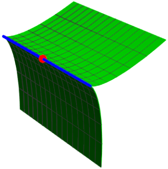
松下　尚生

(九州大学大学院数理学府博士１年; matsushita.yoshiki.297@s.kyushu-u.ac.jp)

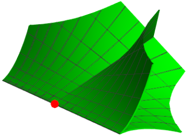
–講演概要–
曲線や曲面に現れる特異点 (一般に尖った点) は, そうでない点に比べて, 複雑な幾何構造を一般に持つ. 本講演では, その構造に関する研究の成果を紹介する.

研究内容 (曲線や曲面の特異点論)

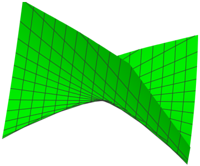
曲線や曲面の特異点とは、多くの場合、尖った点のことをいう.



cuspidal edge



cuspidal cross cap



cuspidal butterfly

これら以外にも様々な特異点が知られており、それらの幾何学的な性質や判定法の研究が活発にされている.

極大曲面と極大面

$ds^2_{\mathbb{L}^3} := (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2$,
$\mathbb{L}^3 := (\mathbb{R}^3, ds^2_{\mathbb{L}^3})$; 3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間,
$D \subset \mathbb{C}$; 単連結領域, $f : D \to \mathbb{L}^3$; C^∞ 級写像, H; f の平均曲率.

定義 (極大曲面)

- f が極大曲面であるとは, $H \equiv 0$ であるときをいう.

- 極大曲面は, 3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間内で, 面積の極大値を与えるような曲面.
- 極大面とは、極大曲面を少し拡張した概念であり、cuspidal edge や cuspidal cross cap 等の特異点を持つ場合がある曲面.

注意

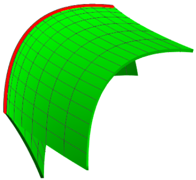
本講演で紹介する結果は, 全て 3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間内の曲面に関する結果である.

研究成果 1 (特異点の幾何学的形状に関する成果)

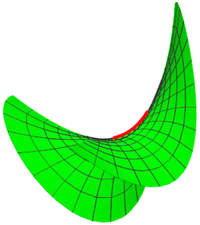
- 極大面に現れる特異点近傍の形状を突き止めた.
  (Y. Matsushita, T, Nakashima and K. Teramoto: Geometric properties near singular points of surfaces given by certain representation formulae, Publ. Math. Debrece, 2021)

定理 ([松下, 中島, 寺本 2021])

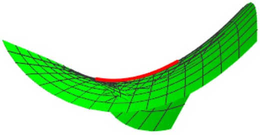
極大面上の第一種 (cuspidal edge や cuspidal cross cap など) 特異点の形状は必ず凹んだ形にしかならない (中央の図と一番右の図)



凸になる曲面



cuspidal edge



cuspidal cross cap

研究成果 2 (特異点の構成に関する成果)

- 与えた実解析的な空間曲線 γ が特異点集合の像となるような極大面を構成する方法を紹介する.

$\gamma\colon \mathrm{J} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{L}^3;\ \gamma'(u) = \alpha(u)(\cos\theta(u), \sin\theta(u), 1)$,
$\mathcal{L}\colon \mathrm{J} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{L}^3;\ \mathcal{L}(u) = \beta(u)(\cos\theta(u), \sin\theta(u), 1)$.
$\alpha(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots,\ \beta(u) = B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + \cdots$.
$\alpha(z), \beta(z)$; J を含む単連結領域への解析接続. このときの極大面は

$$f = \mathrm{Re}\left[\int_{u_0}^{z} (\cos\theta(u), \sin\theta(u), 1)(\alpha(z) - \mathrm{i}\beta(z))\ dz\right]. \tag{1}$$

定理 (特異ビョーリング問題 [松下])

(1) f が $z = 0$ で cuspidal S_1^- singularity を持つ $\Longleftrightarrow$ $A_0 \neq 0,\ B_0 = 0,\ B_1 = 0,\ B_2 \neq 0$.

(2) f が $z = 0$ で cuspidal butterfly を持つ $\Longleftrightarrow$ $A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 \neq 0,\ B_0 \neq 0$.