対称対の 2 重旗多様体と箙の表現

本間 大幹 (九州大学数理学府 D1)

複素簡約代数群 G と G の包含的自己同型 θ に対して, θ の固定部分群 K を対称部分群, (G, K) を対称対と呼ぶ. さらに, G, K それぞれの部分旗多様体 G/P, K/Q の直積 $G/P \times K/Q$ を, 対称対 (G, K) の 2 重旗多様体と呼ぶ. このとき K は $G/P \times K/Q$ に対角的に作用するが, この作用は表現の分岐則などに応用される重要な対象である. これらの対象に対し, 次の二つの問題が存在する.
(1) G, K, P, Q がどのような組のとき K 軌道が有限個となるか?
(2) K 軌道が有限個のときの軌道分解は具体的にどのように書けるか?
この問題に対し講演者は $G = GL_{m+n}, K = GL_m \times GL_n$ の場合に, 軌道と箙の表現との間に対応を与えることにより, 問題を翻訳し解決した.
そこで, 本講演では以上のことについてお話しする.

H. Homma, *Double flag varieties and representations of quivers*, arXiv:2103.14509.

Let $Q_{r,p,q}$ be a quiver of the following form:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \beta_{p-1} \arrow[dl] & \cdots \arrow[l] & \beta_1 \arrow[l] \\
\alpha_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \alpha_{r-1} \arrow[r] & \delta & & \\
 & & & \gamma_{q-1} \arrow[ul] & \cdots \arrow[l] & \gamma_1 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

and $\operatorname{rep} \Bbbk Q_{r,p,q}$ be a category of finite-dimensional representations of $Q_{r,p,q}$.

Definition 1

Define the **Joint flag category** $\mathscr{J}_{r,p,q}$ as follows:
$\mathscr{J}_{r,p,q}$ is a full sub-category of $\operatorname{rep} \Bbbk Q_{r,p,q}$, whose objects are given in the following form:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & B_{p-1} \arrow[dl, "\alpha"'] & \cdots \arrow[l] & B_1 \arrow[l] \\
A_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_{r-1} \arrow[r] & V & & \\
 & & & C_{q-1} \arrow[ul, "\beta"] & \cdots \arrow[l] & C_1 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

where all arrows are injective, and $\operatorname{Im} \alpha \bigoplus \operatorname{Im} \beta = V$.

Joint Flag Variety

Definition 2

For any $\mathbf{d} \in \Lambda^J$, we define $\mathrm{Jl}_{\mathbf{d}}(V)$ is a sub-variety of $\mathrm{Fl}_{\mathbf{d}}(V)$ consisting of the whole of $(A, B, C) \in \mathrm{Fl}_{\mathbf{d}}(V)$ satisfying $(V, A, B, C) \in \mathscr{J}$. At this time $\mathrm{Jl}_{\mathbf{d}}(V)$ is called Joint flag variety.

Proposition 1

以下は同値：
(1) $\mathrm{Jl}_{\mathbf{d}}(V)$ の 2 つの元 x, y が同じ G-軌道に入る.
(2) $\mathscr{J}_{r,p,q}$ の対象 $V(x), V(y)$ が同型.

Corollary 1

$\mathrm{Jl}_{\mathbf{d}}(V)$ の G-軌道の個数が有限個となるかどうかの判定条件は, 次元型を $\mathbf{d}$ と固定したときに $\mathscr{J}_{r,p,q}$ の対象の同型類の個数が有限個となるかどうかで与えることができる. また, 軌道分解の記述はそのときの同型類を記述することで与えられる.

Main Result 1

Theorem 1

以下は同値：

(1) $\mathrm{Jl}_{\mathbf{d}}(V)$ の G-軌道の個数は有限個.

(2) $\mathbf{d}$ は以下のいずれかを満たす $\mathscr{J}$ 上の *summand* $\mathbf{d}'$ を持たない.

$\mathbf{d}'^{+} = ((2^3),(1^3,3),(1^3,3))$, $((3^3),(2^2,5),(1^5,4))$, $((3^3),(1^5,4),(2^2,5))$, $((1^4),(1^2,2),(1^2,2))$, $((2^4),(3,5),(1^5,3))$, $((2^4),(1^5,3),(3,5))$, $((1^5),(2,3),(1^3,2))$, $((1^5),(1^3,2),(2,3))$, $((1^7),(3,4),(2^2,3))$, *or* $((1^7),(2^2,3),(3,4))$.

Theorem 2

$\mathrm{Jl}_{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}(V)$ の G-軌道の個数が有限個とすると, $\mathrm{Jl}_{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}(V)$ の G-軌道と次を満たす非負整数の族 $M=(m_{\mathbf{d}})$ との間に自然な全単射が存在する.

$$\sum_{\mathbf{d}}(m_{\mathbf{d}})\mathbf{d} = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$$

ただし, $\mathbf{d}\in\Lambda^J$ によって添字付けられており, ここで $\mathrm{Jl}_{\mathbf{d}}(V)$ の G-軌道の個数は有限個であり, かつ $Q(\mathbf{d})=1$ を満たす.

Main Result 2

Theorem 3

以下は同値：

(1) $\mathrm{Jl}_{\mathbf{d}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}(V)$ の G-軌道の個数は有限個であり，かつ $Q(\mathbf{d})=1$.

(2) $\mathbf{d}^+$ が以下のいずれか（ただし，$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ の入れ替えを許す）:

$((1),(1),(1,0))$, $((1^6),(2,4),(2^2,2))$, $((1^{2m+1}),(m,m+1),(m,1,m))$ $(m\geq 2)$,

$((1^{2m}),(m,m),(m-1,1,m))$ $(m\geq 2)$, $((1^n),(1,n-1),(1^{n-1},1))$ $(n\geq 2)$,

$((x,x-1,1),(1^x,x),(1^x,x))$ $x\geq 2$, $((x^2,1),(1^x,x+1),(1^{x+1},x))$ $x\geq 2$,

$((2^3),(1^2,4),(1^4,2))$, $((2^3),(2,1,3),(1^3,3))$, $((3,2^2),(2,1,4),(1^4,3))$,

$((3^2,2),(2,1,5),(1^5,3))$, $((3^2,2),(2^2,4),(1^4,4))$, $((4,3,2),(2^2,5),(1^5,4))$,

$((4^2,2),(2^2,6),(1^6,4))$, $((x^3),(x-1,1,2x),(1^{2x},x))$ $x\geq 3$,

$((x^2,x-1),(x-1,1,2x-1),(1^{2x-1},x))$ $x\geq 4$,

$((x,(x-1)^2),(x-1,1,2x-2),(1^{2x-2},x))$ $x\geq 4$,

$(((x-1)^3),(x-1,1,2x-3),(1^{2x-3},x))$ $x\geq 4$, $((3^3),(2^2,5),(2,1^3,4))$,

$(((x-1)^3,1),(x,2x-2),(1^{2x-2},x))$ $x\geq 2$, $((x,(x-1)^2,1),(x,2x-1),(1^{2x-1},x))$ $x\geq 2$,

$((x^2,x-1,1),(x,2x),(1^{2x},x))$ $x\geq 2$, $((x^3,1),(x,2x+1),(1^{2x+1},x))$ $x\geq 2$,

$((2^4),(2,6),(1^6,2))$, $((2^4),(3,5),(2,1^3,3))$, $((2,1^5),(3,4),(2^2,3))$.