有限及び対称多重ゼータ値の重み付き和公式について

東北大学理学研究科数学専攻　修士 2 年　本田涼真

▷多重ゼータ値 (Multiple Zeta Value, MZV)

インデックス (正整数の組)　$\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_r) \in \mathbb{Z}^r_{>0}$, $k_r > 1$ に対して

$$\zeta(\boldsymbol{k}) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \in \mathbb{R}.$$

- MZV の 2 つの類似物 $\zeta_{\mathcal{A}}, \zeta_{\mathcal{S}}$

▷ 有限多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}}$: 和を p 未満で打ち切り，$\mathrm{mod}\ p$ した MZV

$$0 < 1 < \cdots < p-1 < p\,(\equiv 0)$$

▷ 対称多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{S}}$: $\mathrm{mod}\ p$ の順序と analogical に定めた, 以下の順序 $\prec$ で和をとる MZV (有限多重ゼータ値の実類似)

$$0 \prec 1 \prec 2 \prec \cdots \prec (\infty \text{``}=\text{''} -\infty) \prec \cdots \prec -2 \prec -1 (< 0)$$

和の範囲　$\zeta : \displaystyle\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}$,　$\zeta_{\mathcal{A}} : \displaystyle\sum_{0<m_1<\cdots<m_r<p}$,　$\zeta_{\mathcal{S}} : \displaystyle\sum_{0\prec m_1\prec\cdots\prec m_r}$

研究の背景 : 豊富に存在する多重ゼータ値 ζ, 有限及び対称多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}}, \zeta_{\mathcal{S}}$ の関係式族の究明

研究結果 : $\zeta_{\mathcal{A}}, \zeta_{\mathcal{S}}$ の関係式族の 1 つである重み付き和公式の新種を発見

インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\cdots,k_r)\in\mathbb{Z}_{>0}^r$.

▷有限多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}):=\left(\sum_{0<m_1<\cdots<m_r<p}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\mod p\right)_p.$

ただし, $(a_p)_p$ は全ての素数 p に対する a_p の組. また, 有限個の p 成分を除いて各成分が一致すれば同じものと考える.

▷対称多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}):=\sum_{0<m_1\prec\cdots\prec m_r}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\in\mathcal{Z}.$

ただし, $\mathcal{Z}$ は MZV で張られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間.

MZV の関係式の例 : $\zeta(1,2)=\zeta(3),\quad \zeta(1,4)+\zeta(2,3)+\zeta(3,2)=\zeta(5).$

有限/対称多重ゼータ値の関係式の例

$\zeta_{\mathcal{A}}(2,2,5)+\zeta_{\mathcal{A}}(2,5,2)+\zeta_{\mathcal{A}}(5,2,2)+\zeta_{\mathcal{A}}(2,7)+\zeta_{\mathcal{A}}(7,2)=0.$
$\zeta_{\mathcal{S}}(2,2,5)+\zeta_{\mathcal{S}}(2,5,2)+\zeta_{\mathcal{S}}(5,2,2)+\zeta_{\mathcal{S}}(2,7)+\zeta_{\mathcal{S}}(7,2)\equiv 0\mod\zeta(2).$

予想 (Kaneko・Zagier 予想, 簡略版)

$\zeta_{\mathcal{A}}$ の $\mathbb{Q}$-線形関係式は $\zeta_{\mathcal{S}}\mod\zeta(2)$ でも同様に成り立つだろう.

以後, 簡単のため $\zeta_{\mathcal{A}}$ についてのみ考える. 以降の式は (主定理も含めて) 全て $\zeta_{\mathcal{S}} \mod \zeta(2)$ に置き換えても同様に成り立つことが知られている.
$I(k,r) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_r) : \text{インデックス} \mid k_1 + \cdots + k_r = k\}$.

主定理 (H.)

$k, r, i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, 1 \leq i \leq r$ に対して

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in I(k,r)} k_i \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) = (-1)^r \zeta_{\mathcal{A}}(\{1\}^{i-1}, k-r+1, \{1\}^{r-i}).$$

ただし, $\{1\}^d := \underbrace{1, \cdots, 1}_{d}$.

主定理の具体例

$\bullet k = 5, r = 2, i = 2$ のとき
$4\zeta_{\mathcal{A}}(1,4) + 3\zeta_{\mathcal{A}}(2,3) + 2\zeta_{\mathcal{A}}(3,2) + \zeta_{\mathcal{A}}(4,1) = \zeta_{\mathcal{A}}(1,4)$.
$\bullet k = 5, r = 3, i = 2$ のとき
$\zeta_{\mathcal{A}}(1,1,3) + 2\zeta_{\mathcal{A}}(1,2,2) + 3\zeta_{\mathcal{A}}(1,3,1) + \zeta_{\mathcal{A}}(2,1,2) + 2\zeta_{\mathcal{A}}(2,2,1) + \zeta_{\mathcal{A}}(3,1,1) = -\zeta_{\mathcal{A}}(1,3,1)$.

先行研究 1 (Kamano)：パラメタ付き重み付き和公式．パラメタに特殊値を入れることで重み付き和公式が生成される．以下は特殊化の例．

先行研究 1 (Kamano) Kamano's special cases

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)} 2^{w(\boldsymbol{k})}\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) = 0 \quad (k-r : \text{even}), \tag{1}$$

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)} w(\boldsymbol{k})\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) = (-1)^{k-r-1}\zeta_{\mathcal{A}}(\{1\}^{r-1}, k-r+1). \tag{2}$$

ただし, $w(\boldsymbol{k})$ はインデックスの第 1 成分から順に数えた 1 の個数を表す．

先行研究 2 (Hirose-Murahara-Saito, Murahara)：2 べき型重み付き和公式．

先行研究 2 (Hirose-Murahara-Saito, Murahara)

$k, r, i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, r$: odd, $1 \leq i \leq r$ に対して

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)} 2^{k_i}\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) = 0.$$

先行研究と主定理の概略

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)} 2^{w(\boldsymbol{k})}\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) \longrightarrow \sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)} 2^{k_1}\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) \overset{\text{generalize.}}{\rightsquigarrow} \sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)} 2^{k_i}\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}).$$

(1) $(w(\boldsymbol{k}) \longmapsto k_1$とした$)$ (先行研究 2)

. . . .

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)} w(\boldsymbol{k})\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) \longrightarrow \sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)} k_1\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) \overset{\text{generalize.}}{\rightsquigarrow} \boxed{\sum_{\boldsymbol{k}\in I(k,r)} k_i\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}).}$$

(2) $(w(\boldsymbol{k}) \longmapsto k_1$とした$)$ (H.)

主要参考文献

[1] M. Hirose, H. Murahara, and S. Saito *Weighted sum formula for multiple harmonic sums modulo primes*, Proc. Amer. Math. Soc. 147(8) (January 2019), 3357-3366.

[2] K. Kamano *Weighted sum formulas for finite multiple zeta values*, J. Number Theory, 2018.

[3] H. Murahara *A combinatorial proof of the weighted sum formula for finite and symmetric multiple zeta(-star) values*, Kobe J. Math (to appear 2020).