計算可能実関数の計算量算定における
適切な実数表現

廣島 佳汰
京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻 数理解析系 修士課程1年

専門分野

計算量理論

アルゴリズムの実行ステップ数やリソース消費量を測る指標

アルゴリズムの計算量を研究する分野

入力から出力を得るための形式的計算手順

計算可能解析学

計算可能実関数を研究の主対象とする分野

実数を入出力するアルゴリズム

研究内容と動機

実数表現には，“計算可能実関数の計算量算定に適切なものとそうでないもの”がある

無限文字列と実数の対応付け　　アルゴリズムの実行時間の概算

私の研究は

計算量算定に適切な実数表現が満たすべき性質は何か

そのような性質を保持する実数表現に関して何が成立するか

の追求である

今回は, 前者を具体例を交えて紹介する

関数の計算可能性

※定義や定理の詳細は枠内参照

Type2 Turing Machine(TM2)　　無限文字列を入出力する仕組みを備えた計算機構
(Turing Machine(TM)　　有限文字列を入出力する仕組みを備えた計算機構)

実数表現(定義 1.)　　無限文字列と実数との対応付け

無限文字列を入出力する関数の一種である

実関数*f*が実数表現*μ*により計算可能(定義 2.)
→ あるTM2 *M*があって, 無限文字列を
1. *μ*で送った後, それを*f*で送る(右下の可換図式の↑→)
2. *M*に入力し, その出力を*μ*で送る(〃→↑)
という両経路で結果が同一になること

記法.
Σ を, 0, 1, $\bar{1}$, $\sharp$ を含む有限集合とする．また, X^*, X^ω をそれぞれ, 集合 X の元からなる有限列全体, 無限列全体と定義する．
例．$011\sharp011 \in \Sigma^*$, $011\sharp011\sharp011\ldots \in \Sigma^\omega$

定義 1.
部分関数 $\mu :\subseteq \Sigma^\omega \to \mathbb{R}$ が実数表現であるとは, $\mu(\mathrm{dom}(\mu)) = \mathbb{R}$ が成立することである．
ただし, $\mathrm{dom}(\mu)$ は μ の定義域である．

定義 2.
実部分関数 $f :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が実数表現 μ により計算可能であるとは, 右の図式が可換になることである．
すなわち, 以下の 2 条件を満たす TM2 M が存在することである．

1. $\mathrm{dom}(f \circ \mu) \subseteq \mathrm{dom}(\mu \circ M)$
2. $\forall p \in \mathrm{dom}(f \circ \mu),\ f(\mu(p)) = \mu(M(p))$

(ただし, $\mathrm{dom}(f \circ \mu) := \{p \in \Sigma^\omega \mid p \in \mathrm{dom}(\mu)$ かつ $\mu(p) \in \mathrm{dom}(f)\}$, $\mathrm{dom}(\mu \circ M)$ についても同様)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\
\Sigma^\omega \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\exists M"] & \Sigma^\omega \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

計算量と時間階層性

実関数fがt-時間で実数表現μにより計算可能(定義 3.)

実数表現μにより計算可能な実関数fの入力から出力を得るまでの時間が,
出力長を引数とする関数tで上から抑えられること

実関数fの計算量算定　上記の関数tを求めること

時間階層性(定義 4.)

どんな制限時間に対しても,
その制限時間内では計算不可能であるような計算可能関数が存在すること

時間階層性という性質は計算量算定に適切な表現が満たすべき性質である!!

時間階層性のイメージ図

定義 3.
$f\colon \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を実部分関数, $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を関数とする．このとき f がt-時間で実数表現 μ により計算可能であるとは，定義 **2.** の 2 条件と以下の条件 3. を満たす TM2 M と，$c > 0$ が存在することである．

$$3.\ \mathrm{Time}_M(p)(k) \le c \cdot t(k) + c$$

ただし $\mathrm{Time}_M(p)(k)$ は，M に p を入力したとき，k 桁目までを出力するまでにかかるステップ数であり，M に p を入力して k 桁目を出力しない場合は ∞ とする．

定義 4.
実数表現 μ が時間階層性を持つとは以下を満たすことである ($\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{N}$ 上の恒等関数)．

$\forall t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ with t は計算可能, $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} \in O(t)$, $\exists f\colon \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.t.
　f は実数表現 μ により計算可能 かつ t-時間で実数表現 μ により計算可能でない

ここで, $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が計算可能であるとは, 以下の 2 条件を満たす TM が存在することである．

1. $\mathrm{dom}(\nu_2) \subseteq \mathrm{dom}(\nu_2 \circ M)$
2. $\forall p \in \mathrm{dom}(\nu_2),\ t(\nu_2(p)) = \nu_2(M(p))$

(ただし, $\nu_2\colon \subseteq \Sigma^* \to \mathbb{N}$ は 2 進表記 ($\nu_2(0) = 0, \nu_2(1) = 1, \nu_2(10) = 2 \ldots$) であり,
$\mathrm{dom}(\nu_2 \circ M)$ は, $\mathrm{dom}(\nu_2 \circ M) := \{p \in \Sigma^* \mid p \in \mathrm{dom}(M)$ かつ $M(p) \in \mathrm{dom}(\nu_2)\}$ である)

時間階層性を持つ表現, 持たない表現

Sd表現(定義 5.)

入力 不要な桁を省いた符号付き無限二進文字列

出力 入力の符号付き無限二進文字列に対応する実数

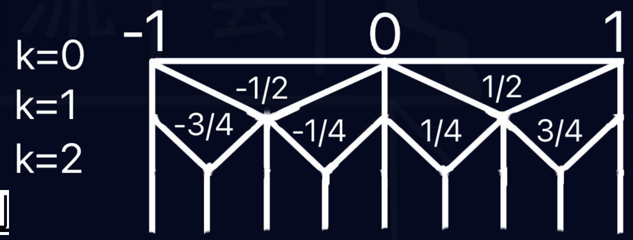
Sd表現の入力は桁情報を過不足なく持っている

Cauchy表現(定義 6.)

入力 実数の任意精度の近似有理数に対応する有限二進文字列を含む無限二進文字列

出力 入力の無限二進文字列に対応する実数

※上記の精度は, 実数との距離の近さを表している(桁情報を保持しているとは限らない)



Sd表現のイメージ図

時間階層性をSd表現は持ち, Cauchy表現は持たない

つまり, Cauchy表現を採用した実関数はすべて同一の計算量となる(定理 7.)

定義 5.

Sd 表現 (Signed digit 表現) $\rho_{\mathrm{sd}} :\subseteq \Sigma^\omega \to \mathbb{R}$ を以下で定義する．

$\mathrm{dom}(\rho_{\mathrm{sd}}) := \{a_n \dots a_0.a_{-1}a_{-2}\dots \in \{0,1,\bar{1}\}^* \cup \{.\} \cup \{0,1,\bar{1}\}^\omega \mid n \geq -1$ が成立し，さらに

$n \geq 0$ なら $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ なら $a_n a_{n-1} \notin \{1\bar{1}, \bar{1}1\}\}$

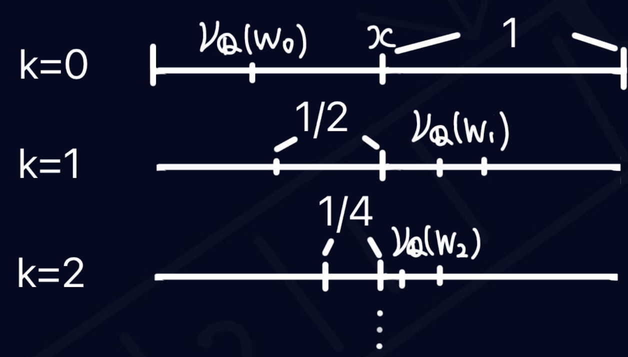
$\rho_{\mathrm{sd}}(a_n \dots a_0.a_{-1}a_{-2}\dots) := \sum_{i=n}^{-\infty} a_i 2^i$ (ただし $\bar{1}$ は，右辺では -1 と定める)

定義 6.

Cauchy 表現 $\rho :\subseteq \Sigma^\omega \to \mathbb{R}$ を以下で定義する．

$\rho(p) = x :\Leftrightarrow \exists w_0, w_1 \dots \in \{0,1\}^*$ s.t. $p = w_0 \sharp w_1 \sharp \cdots$ かつ $\forall k \in \mathbb{N},\ |\nu_{\mathbb{Q}}(w_k) - x| \leq 2^{-k}$

(ただし $\nu_{\mathbb{Q}}$ は，Σ^* から $\mathbb{Q}$ への全射部分関数である (1 つ適当に固定する))



Cauchy表現のイメージ図

定理 7.

ρ_{sd} は時間階層性を持ち，ρ は時間階層性を持たない．すなわち，ある計算可能関数 $t: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ があって，実数表現 ρ により計算可能な任意の関数 $f :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が，t-時間で実数表現 ρ により計算可能となる．

まとめと今後の課題

Cauchy表現を採用すると…

すべて同一の計算量となってしまう!!!

→Cauchy表現は計算量算定に不適切な表現である

時間階層性以外の計算量算定の適切性条件の模索

時間階層性を満たす一般集合上の表現の構成　　が今後の課題である

また, 時間階層性を持つ表現に関して何が成立するかについても明らかにしていく

参考文献

計算複雑性理論に関する参考文献

Michael Sipser.
Introduction to the Theory of Computation.
Course Technology, Boston, MA, third edition, 2013.

計算可能解析学に関する参考文献

Klaus Weihrauch.
Computable Analysis - An Introduction.
Texts in Theoretical Computer Science, An EATCS Series, Springer, 2000.

Vasco Brattka, Peter Hertling, and Klaus Weihrauch.
A Tutorial on Computable Analysis, pages 425-491.
Springer New York, New York, NY, 2008.