ガウス型解析関数とその一般化

野田 航平（Noda Kohei）

九州大学大学院数理学府博士後期課程1年 マス・フォア・イノベーション卓越大学院コース

自己紹介

生い立ち 福岡生まれ，福岡育ちの生粋の博多っ子です．学部・修士課程ともに九州大学で過ごしました．

指導教官 白井朋之教授（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）です．

専門・その魅力 確率論です．特に，確率論的現象が舞台装置となり，関数論や調和解析の技術を梯子に研究しています．このポスター発表での主役であるガウス型解析関数の零点は，互いに相互作用し合うランダムな零点の粒子系のモデルの一つです．そのランダムな零点たちは極めて美しい幾何学的描像をもち，確率論という規定演技の中で関数論や調和解析の力が自然に対象に伝わるような感覚を味わうことができます．

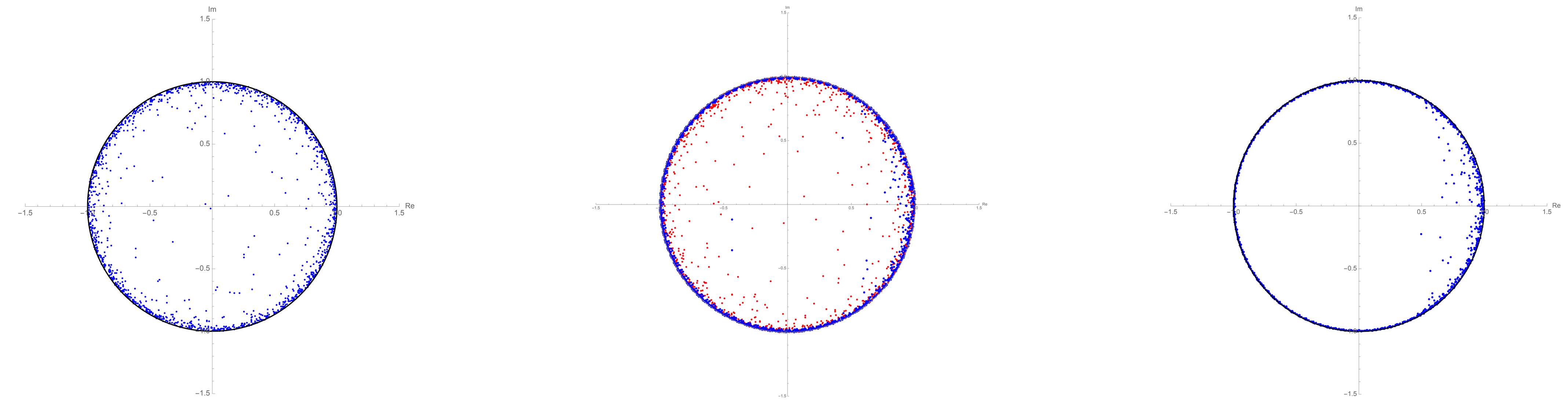
近況 博士後期課程からマス・フォア・イノベーション卓越大学院コースに編入し，これまで学んできた確率論の技術を使って学際的な共同研究をし，他分野及び産学研究に貢献したいと考えています．最近，ランダム関数の零点や臨界点を調べることは画像処理やニューラルネットワークの理論的解析に応用できることが多くの研究者たちによって指摘されており，そのような分野に自分の研究の中で培ってきた技術を使って何らかの形で関わることができれば，と考えています．

研究の動機や大まかな位置づけ

ランダムテイラー級数の歴史 1930年のSteinhausの仕事に始まり，Payley, Zygmund，Wienerといった面々によりランダムテイラー級数は今日まで盛んに研究されています．例えば，Wienerはブラウン運動の構成にランダム級数を用いています．また，ランダム多項式の零点はLittlewoodやOfford, Kac，Riceらにより古くから研究され続けています．

ブレイクスルー 2005年にPeres-Virágは独立同分布の標準複素ガウス型確率変数を係数に持つランダム級数の零点を確率過程と考えた時，行列式点過程と呼ばれるとりわけ素晴らしい確率過程となることを示しました．この結果を皮切りに多くの興味深い研究がなされてきましたが，いずれも係数のガウス型確率変数は独立同分布性を仮定しています．

研究の動機・新規性 独立同分布でないガウス型確率変数を係数に持つランダム冪級数の零点を調べるという自然な拡張はガウス型ランダム冪級数の研究に新しい風を吹き込むことができると私は考えています．正確に述べると，ランダム冪級数の零点は係数のランダムネスに強く依存することを私は発見しました．この事実は係数の独立性が零点の振る舞いの重要な要素であることを示唆しており，この方向性の研究はこれまでなされていなかったのです．次の3つの図はガウス型ランダム冪級数の零点のplot図です．一番左が独立同分布の場合で，一番右がある定常複素ガウス過程を係数に持つ場合，中央がそのplot図の重ね合わせです．これらの違いを定性的・定量的に説明することが私の研究の最終目標です．



ガウス型解析関数とその歴史

- $i=\sqrt{-1}$: the imaginary number.
- 標準複素ガウス型確率変数：$\zeta=\zeta_1+i\zeta_2 \overset{d}{\sim} \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$, ここで $\zeta_1,\zeta_2 \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1/2)$.
- $\mathbf{E}[\zeta]=0,\ \mathbf{E}[|\zeta|^2]=1$.
- $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$を独立同分布の標準複素ガウス型確率変数とすると，任意の$n,m\in\mathbb{Z}$に対して，$\mathbf{E}[\zeta_n\overline{\zeta_m}]=\delta_{n,m}$.

定義 (ガウス型解析関数（Gaussian analytic function, GAF）)

fが領域D上のガウス型解析関数（*GAF*）とは，fが$z,w\in D$に対して共分散核$K_f(z,w)=\mathbf{E}[f(z)\overline{f(w)}]$をもつ正則関数値ガウス過程のことである．すなわち，任意の$n\in\mathbb{N}$と$z_1,\dots,z_n\in D$に対して, 共分散行列

$$\Sigma=(K_f(z_j,z_k))_{1\le j,k\le n}$$

が存在して，

$$(f(z_1),\dots,f(z_n)) \overset{d}{\sim} \mathcal{N}_{\mathbb{C}^n}(0,\Sigma).$$

のことである．

GAFの研究の典型例及び火付け役となったのは次のPeres-VirágのGAFによる：$f_{\mathrm{PV}}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta_n z^n$．共分散は$\mathbf{E}[f_{\mathrm{PV}}(z)\overline{f_{\mathrm{PV}}(w)}]=(1-z\overline{w})^{-1}=S_{\mathbb{D}}(z,w)$. (Szegő kernel.)で与えられる．Peres-Virágは次を示した：

定理 (Peres-Virág, 2005)

$\mathcal{Z}_{f_{\mathrm{PV}}}={f_{\mathrm{PV}}}^{-1}\{0\}$を$f_{\mathrm{PV}}(z)$の零点過程とする. このとき, 零点過程$\mathcal{Z}_{f_{\mathrm{PV}}}$は単位円板$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{D}:|z|<1\}$上の*Bergman kernel* $K_{\mathrm{Berg}}(z,w)=(1-z\overline{w})^{-2}$に付随する行列式点過程となる.

行列式点過程は素晴らしい性質を多く持つ．例えば，$N_{f_{\mathrm{PV}}}(r)=\#\{z\in\mathcal{Z}_{f_{\mathrm{PV}}}:|z|<r\}$とおくと，行列式の表示から次のように高次モーメントを明示的に計算できる！

$$\mathbf{E}\binom{N_{f_{\mathrm{PV}}}(r)}{k}=\frac{r^{k(k+1)}}{(1-r^2)(1-r^4)\cdots(1-r^{2k})}.$$

これから，平均$\mathbf{E}N_{f_{\mathrm{PV}}}(r)=\frac{r^2}{1-r^2}$を直ちに得る．
零点過程が行列式点過程となるランダム級数は現在知られている限り，Peres-VirágのGAFとその行列拡張版に限るが，この驚くべき結果がガウス型ランダム級数の零点の研究のブレイクスルーとなった．

例 (Random power series)

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\ge0}}$: 複素数.
- $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\ge0}}$: *i.i.d.* 標準複素ガウス型確率変数.

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta_n z^n$は*GAF*. 確率1で$\limsup_{n\to\infty}|\zeta_n|^{\frac{1}{n}}=1$なので，$f(z)$の収束半径$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$の収束半径.　次は共形不変性を持つ*GAF*.

- $f_L^{\mathrm{Hyp}}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{\Gamma(L+n)}{\Gamma(L)n!}}\zeta_n z^n$ *for* $L>0$．したがって，$f_{\mathrm{PV}}(z)=f_1^{\mathrm{Hyp}}(z)$.
- $f_L^{\mathrm{Flat}}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{L^n}{n!}}\zeta_n z^n$ *for* $L>0$,
- $f_L^{\mathrm{Elli}}(z)=\sum_{n=0}^{L}\sqrt{\binom{L}{n}}\zeta_n z^n$ *for* $L=1,2,\dots$.

共形不変性とは，例えば次の意味で同分布のこと：

$$f_L^{\mathrm{Hyp}}(\varphi(z)) \overset{d}{=}{}^{\exists} h(z)f_L^{\mathrm{Hyp}}(z),\quad z\mapsto\varphi(z)=\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}},\quad |a|^2-|b|^2=1.$$

ここで，$h(z)$：非ゼロ決定論的関数．f_L^{Flat}，f_L^{Elli}はそれぞれ，$z\mapsto az+b$ ($|a|=1$)，$z\mapsto\frac{az+b}{-\overline{b}z+\overline{a}}$ ($|a|^2+|b|^2=1$)が作用する．実はこのような共形不変性を持つGAFはこの三つに限られる.（Calabi's rigidity.）

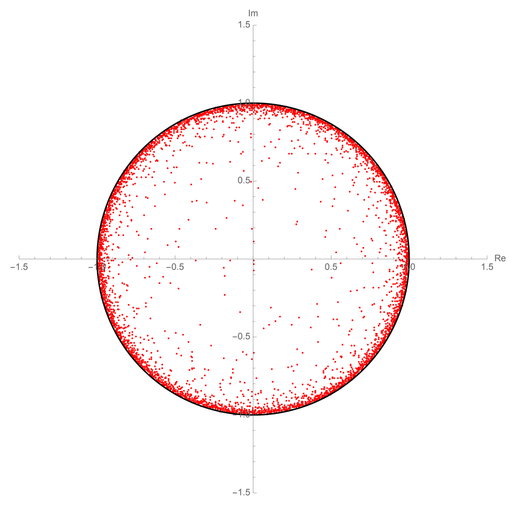


Figure: $f_L^{\mathrm{Hyp}}(z)$の零点のplot

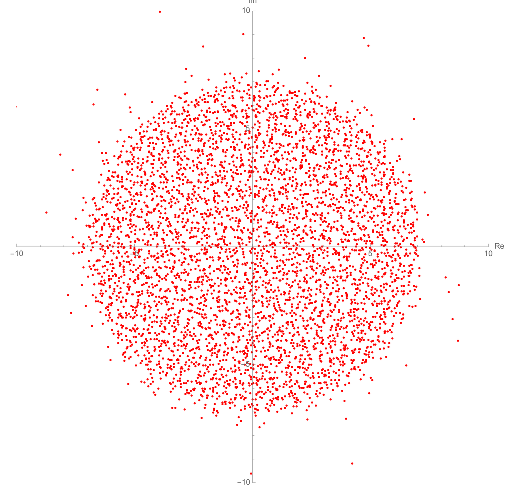


Figure: $f_L^{\mathrm{Flat}}(z)$の零点のplot

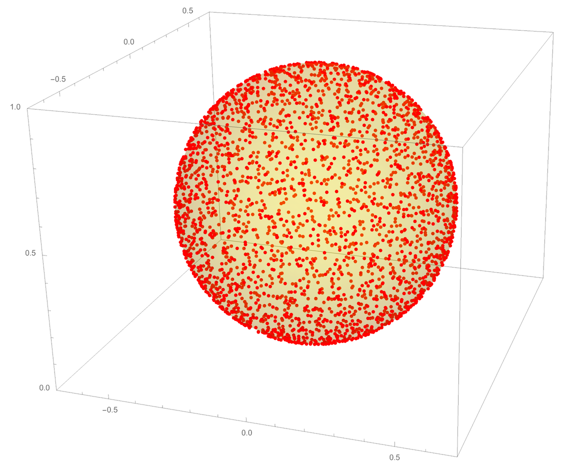


Figure: $f_L^{\mathrm{Elli}}(z)$の零点のplot

Peres-VirágのGAFのブレイクスルーの後，他にも以下のようなものもある．

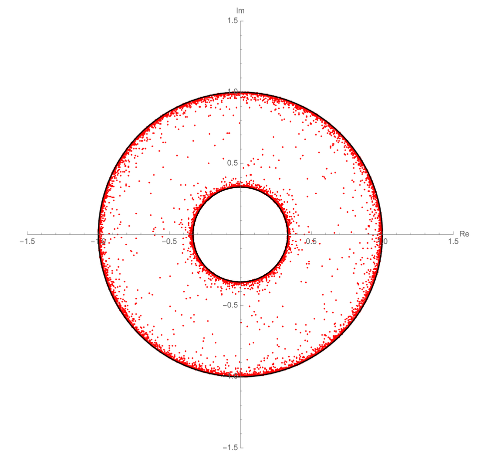


Figure: 香取-白井のGAF

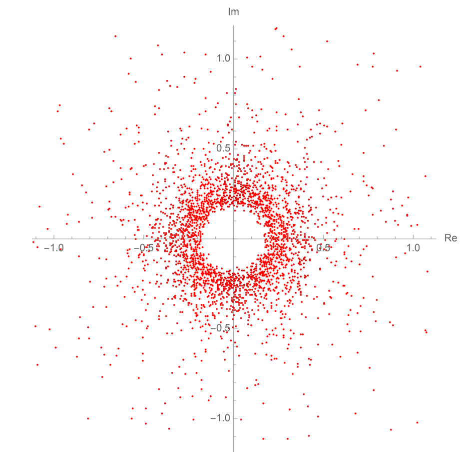


Figure: Holomorphic chaos 1

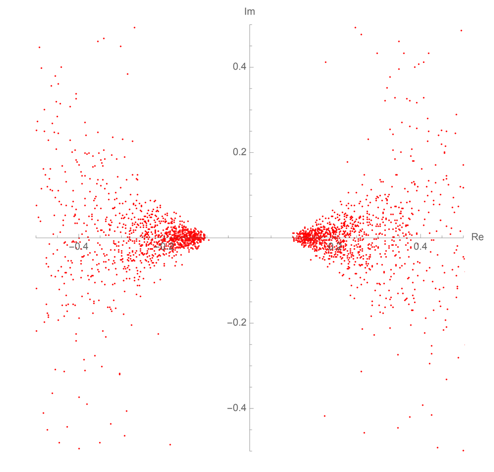


Figure: Holomorphic chaos 2

いろいろな広がりを見せている．しかし，いずれも独立同分布の標準複素ガウス型確率変数を係数にもつランダム級数のみを考えていた．
dependentの場合はどうなる？→ガウス型ランダム級数の自然な一般化.

定常複素ガウス過程を係数に持つランダム冪級数

以下の研究は白井朋之教授との共同研究に基づく.

- $\Xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$が平均0の定常複素ガウス過程とは, Ξが平均0, 共分散核$\gamma(k) = \mathbf{E}[\xi_n \overline{\xi_{n+k}}]$をもつ複素ガウス過程のことである.(以下では, 常に平均0, 分散1と仮定する.)
- 最近, Mukeru, Mulaudzi, Nazabanita, Mpandaはハースト指数$0 \le H < 1$に対して, fractional Gaussian noise (fGn) $\Xi^{(H)} = \{\xi_k^{(H)}\}_{k=0}^\infty$を係数に持つ単位円板上ランダム冪級数$f_H(z) = \sum_{k=0}^\infty \xi_k^{(H)} z^k$の零点を調べた. fGnの共分散核は次で与えられる.

$$\mathbf{E}[\xi_k^{(H)} \overline{\xi_{k+n}^{(H)}}] = \frac{1}{2}|n+1|^{2H} + \frac{1}{2}|n-1|^{2H} - |n|^{2H}$$

- 彼らは$f_H(z) = \sum_{k=0}^\infty \xi_k^{(H)} z^k$の$\mathbb{D}_r$における零点の個数の期待値が次で与えられることを示した.

$$\frac{r^2}{1-r^2} - C_{1,H}\left(\frac{1}{2\sqrt{1-r^2}} - \frac{1}{2}\right) \le \mathbf{E}[N_{f_H}(r)] \le \frac{r^2}{1-r^2} - C_{2,H}\left(\frac{1}{2\sqrt{1-r^2}} - \frac{1}{2}\right),$$

ここで, $N_{f_H}(r) = \#\{z \in \mathbb{C} : |z| < r, f_H(z) = 0\}$であり, $C_{1,H}, C_{2,H} \ge 0$はHにのみ依存する定数.

Remark

主要項は*Peres-Virág*と同じものが現れており, その次に独立同分布の場合にはなかった負の*slower term*が現れている. しかし, 一般にこの正確な漸近展開はわかっていない.(これがモチベーション.)

零点の個数の平均の漸近挙動を正確に知ることがdependentの場合を取り扱う最初のステップ. ガウス型解析関数の理論で有名な次の公式に頼る:

命題 (Edelman-Kostlanの公式)

- $D \subset \mathbb{C}$: なめらかな境界を持つ領域.
- f: Dの近傍で定義された*GAF*.
- $K_f(z,w) = \mathbf{E}[f(z)\overline{f(w)}]$: fの共分散核.
- $N_f(D)$: D内のfの零点の個数.

このとき,

$$\mathbf{E}N_f(D) = \frac{1}{4\pi}\int_D \Delta \log K_f(z,z) d^2z = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \partial_z \log K_f(z,z) dz$$

が成り立つ. ここで, 二つ目の等式において, ∂D上に*singularity*はないと仮定する.

定常複素ガウス過程を係数に持つランダム冪級数の設定に応用すると,

系

- $\Xi = \{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$: 平均0, 分散1の定常複素ガウス過程. その共分散は

$$\mathbf{E}[\xi_k \overline{\xi_l}] = \gamma(k-l) \quad \textit{for } k, l \in \mathbb{Z},$$

で与えられるとする. ここで, $\gamma(0) = 1$.
- $f(z) = \sum_{k=0}^\infty \xi_k z^k$.
- $D \subset \mathbb{D}$: ∂D上で*singularity*をもたないなめらかな境界を持つ領域.
- $K_f(z,w) = G_2(z,w)/(1-z\overline{w})$とおく. ここで, $G_2(z,w) = 1 + G(z) + \overline{G(w)}$, $G(z) = \sum_{n=1}^\infty \overline{\gamma(n)} z^n$.

このとき,

$$\mathbf{E}N_f(D) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{\overline{z}}{1-|z|^2} dz + \mathcal{J}(D),$$

が成り立つ. ここで,

$$\mathcal{J}(D) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{G'(z)}{G_2(z,z)} dz = -\frac{1}{\pi}\int_D \left(\frac{|G'(z)|}{G_2(z,z)}\right)^2 d^2z.$$

これにより, 次のことを示すことができる:

定理 (Main result 1, Shirai and N., 2021.)

上の系と同じ設定. このとき,

$$\mathbf{E}[N_f(D)] \le \mathbf{E}[N_{f_{\mathrm{PV}}}(D)].$$

が成り立つ. また, 領域D上で等号が成り立つための必要十分条件は$f(z) \stackrel{d}{=} f_{\mathrm{PV}}(z)$.

これは, ランダムネスが最も強い$\simeq$零点の個数が最大, と言っている. 特に$D = \mathbb{D}_r$の時, $\mathbf{E}N_f(r) = \frac{r^2}{1-r^2} + \mathcal{J}(r)$. ここで, $\mathcal{J}(\mathbb{D}_r) = \mathcal{J}(r)$. $D = \mathbb{D}_r$で$z \mapsto rz$と変数変換して,

$$\mathcal{J}(r) = \frac{r}{2\pi i}\oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{G'(rz)}{\Theta(r,z)} dz, \quad \Theta(r,z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(k) r^{|k|} z^k.$$

$\Theta(r,z)$の零点が解析の肝となる! 結論から述べると
ランダムな零点の個数の漸近挙動はスペクトル関数$\Theta(1,z)$の零点が単位円周上に乗ることとその多重度により決定される!

finitely dependent caseにおける零点の個数の漸近挙動

次の共分散を持つ2-dependentな定常複素ガウス過程場合をまずは考える：

$$\gamma_{a,b}(k) = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ a & (k=\pm 1) \\ b & (k=\pm 2) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

- $\Xi = \{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$: 共分散$\gamma_{a,b}(k)$をもつ定常複素ガウス過程.
- $f_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k z^k$.
- $N_{f_{a,b}}(r) = \#\{z \in \mathbb{C} : |z| < r, f_{a,b}(z) = 0\}$ for $0 < r < 1$.
- $K_{f_{a,b}}(z,w) = \left(1 + a(z+\overline{w}) + b(z^2+\overline{w}^2)\right) / (1 - z\overline{w})$.
- $\Theta(r,z) = 1 + ar(z+z^{-1}) + br^2(z^2+z^{-2})$.

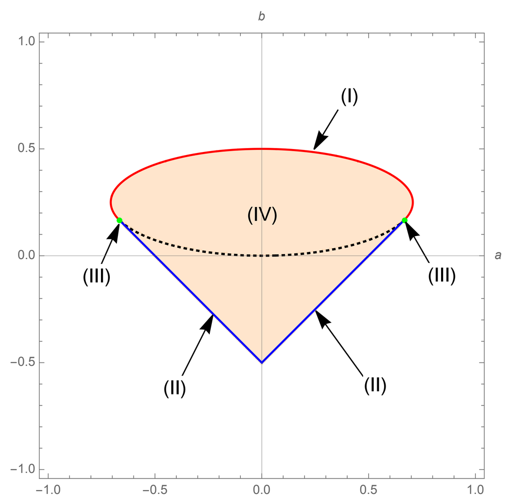
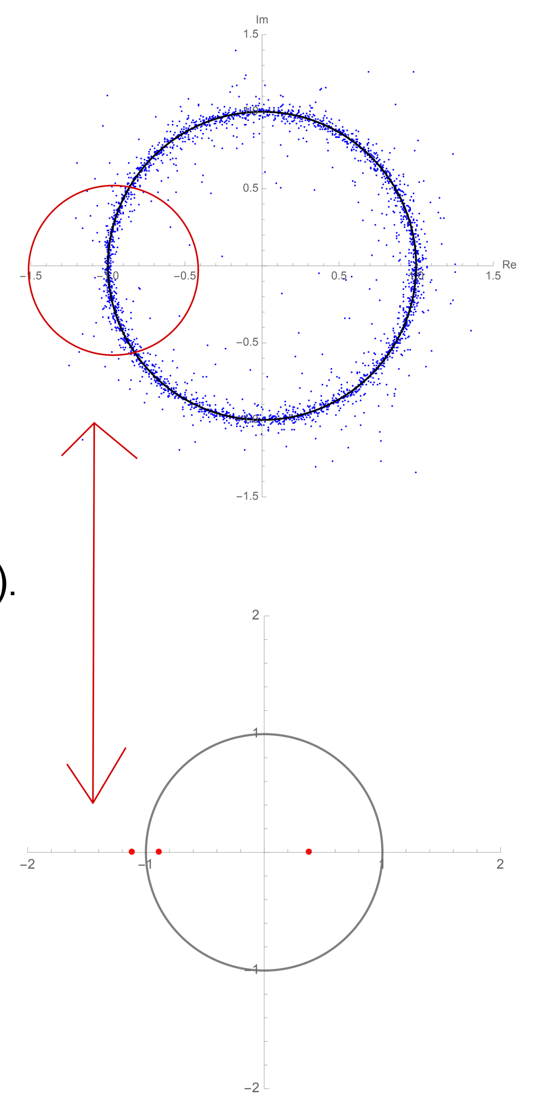
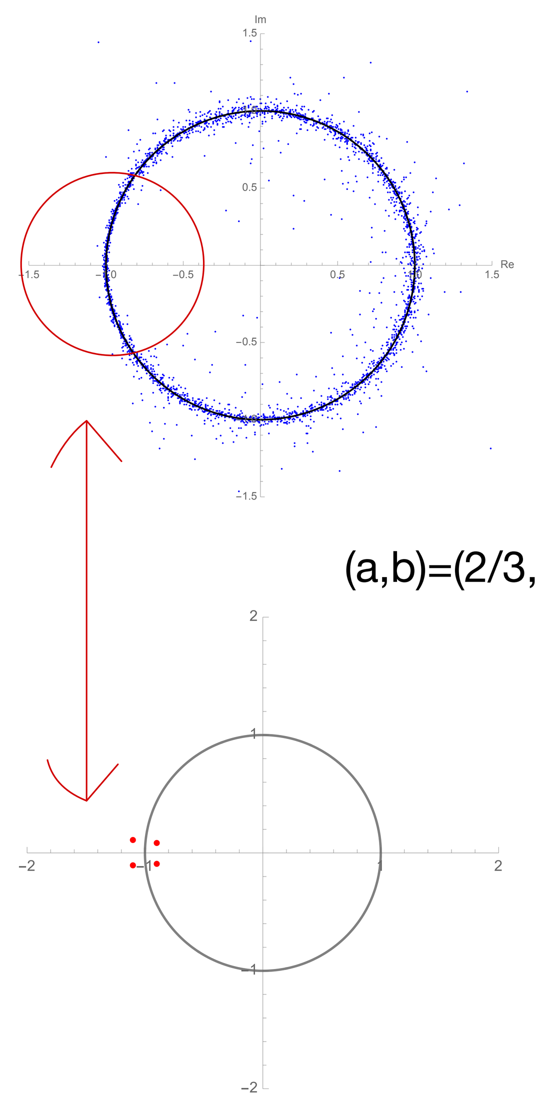


Figure: $\gamma_{a,b}(k)$が正定値となる領域$\mathcal{P}$.



(a,b)=(1/4,-1/4).



(a,b)=(2/3,1/6).

定理 (Main result 2, Shirai and N., 2021.)

左の2-*dependent*ケースの時，$\mathbf{E}N_{f_{a,b}}(r)$の漸近挙動は次のようになる.

(i) もし(a,b)が$a^2/8 + (b-1/4)^2 = 1/16$かつ$1/6 < b \le 1/2$を満たすならば,

$$\mathbf{E}N_{f_{a,b}}(r) = \frac{r^2}{1-r^2} - \sqrt{\frac{2b}{6b-1}\frac{1}{(1-r^2)^{1/2}}} + O(1) \quad \textit{as } r \to 1.$$

(ii) もし(a,b)が$b = |a| - 1/2$かつ$-1/2 \le b < 1/6$を満たすならば,

$$\mathbf{E}N_{f_{a,b}}(r) = \frac{r^2}{1-r^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-2b}{1-6b}\frac{1}{(1-r^2)^{1/2}}} + O(1) \quad \textit{as } r \to 1.$$

(iii) もし$(a,b) = (\pm 2/3, 1/6)$を満たすならば,

$$\mathbf{E}N_{f_{a,b}}(r) = \frac{r^2}{1-r^2} - \frac{1}{2^{5/4}}\frac{1}{(1-r^2)^{3/4}} + O\left(\frac{1}{(1-r^2)^{1/4}}\right) \quad \textit{as } r \to 1.$$

(iv) もし(a,b)が$\mathcal{P}$の内部に属するならば, $^{\exists}C(a,b) \ge 0$ *s.t.*

$$\mathbf{E}N_{f_{a,b}}(r) = \frac{r^2}{1-r^2} - C(a,b) + O\left(1-r^2\right) \quad \textit{as } r \to 1.$$

- 次の共分散を持つn-dependentな定常複素ガウス過程を考える.

$$\gamma_n(k) = \begin{cases} \binom{2n}{n+k}\binom{2n}{n}^{-1} & (|k| = 0,1,2,\dots,n) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

- n-dependentの場合には次が成り立つ.
  $\mathcal{J}(r) = \frac{r}{2\pi i}\oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{G'(z)}{\Theta(r,z)}dz = \frac{r}{2\pi i}\oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{p_n(r,z)}{q_n(r,z)}dz$, ここで

$$q_n(r,z) = z^n\binom{2n}{n}\Theta(r,z) = z^n\sum_{k=-n}^{n}\binom{2n}{n+k}r^{|k|}z^k, \quad q_n(1,z) = (z+1)^{2n}.$$

- $\Theta(1,z)$は次で与えられるガウス過程のスペクトル密度関数と一致する：

$$\Theta(1,z) = \sum_{k=-n}^{n}\gamma_n(k)z^k = \binom{2n}{n}^{-1} z^{-n}(z+1)^{2n} \quad \text{for } z \in \partial\mathbb{D},$$

  これは最も退化している場合，つまり，$z=-1$は多重度$2n$の零点である.
- $q_n(r, z(r)) = 0$に対する解$z(r)$の$r \to 1$での漸近挙動の計算を計算する必要がある．しかし，陰関数定理は適用できない設定！この問題を（平面）代数曲線でよく知られているPuiseux expansionで克服した.
- ランダムな零点の個数の漸近挙動を計算するために，定常複素ガウス過程のスペクトル密度関数の零点を調べる必要があり，そこに代数曲線の技法を援用するという数学の有機的つながりを感じる.

以上をまとめると次を得る.

定理 (Main result 3, Shirai and N., 2021.)

$\Xi = \{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$: 次の共分散を持つ平均*0*，分散*1*の$n$-*dependent*な定常複素ガウス過程.

$$\gamma_n(k) = \begin{cases} \binom{2n}{n+k}\binom{2n}{n}^{-1} & (|k| = 0,1,2,\dots,n) \\ 0 & (\textit{otherwise}), \end{cases} \quad \textit{and} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\xi_k z^k.$$

このとき,

$$\mathbf{E}N_f(r) = \frac{r^2}{1-r^2} - D_n(1-r^2)^{-\frac{2n-1}{2n}} + O\left((1-r^2)^{-\frac{2n-3}{2n}}\right) \quad \textit{as } r \to 1.$$

ここで,

$$D_n = \frac{1}{2n\sin\frac{\pi}{2n}}\left\{\binom{2(n-1)}{n-1}\right\}^{\frac{1}{2n}}.$$

Peres-Virágのとき（独立同分布の場合）は，$\mathbf{E}N_{f_{0,0}}(r) = \frac{r^2}{1-r^2}$.

finitely dependent caseにおける零点の個数の漸近挙動と今後の課題

一般に，もし$\Theta(1,z)$が$\partial\mathbb{D}$上に多重度$2k$の零点をもつならば，$(1-r^2)^{-\frac{2k-1}{2k}}$が$\mathbf{E}N_f(r)$の$r\to 1$の漸近挙動で現れる．したがって，$n$-dependentの場合における結果は次のように一般化される．

系 (General form)

- $\Xi=\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$: 平均$0$，分散$1$の*finitely dependent*な定常複素ガウス過程．
- Ξのスペクトル密度関数$\Theta(1,z)$は多重度$2k_j$の零点θ_j $(j=1,2,...,p)$をもつ．
- $\alpha=(2k-1)/(2k)$ *with* $k=\max_{1\le j\le p}k_j$; $\alpha=0$ *otherwise* とする．

このとき，$^{\exists}C_{\Xi}>0$ *s.t.* $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k z^k$の$\mathbb{D}_r$内における零点の個数の期待値を$N_f(r)$とおくと，次が成り立つ．

$$\mathbf{E}N_f(r)=\frac{r^2}{1-r^2}-C_{\Xi}(1-r^2)^{-\alpha}+o\left((1-r^2)^{-\alpha}\right)\quad \textit{as } r\to 1.$$

- 次の零点のplot図の推移を見る．より正確に零点の振る舞いを捉えるためには，cone wiseの領域で零点を調べる必要がある．

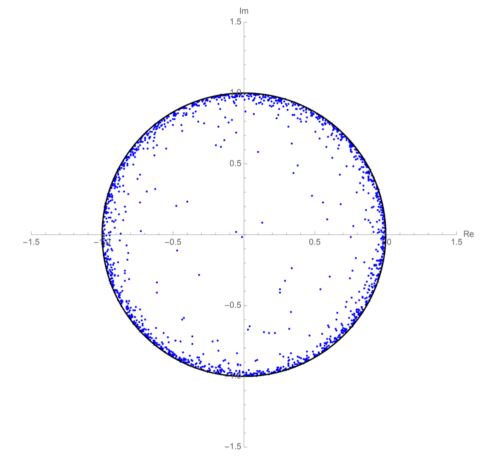


Figure: Peres-Virág case

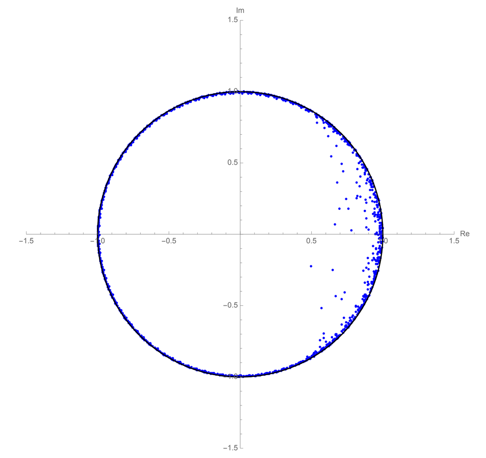


Figure: $\{\gamma_{30}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ case

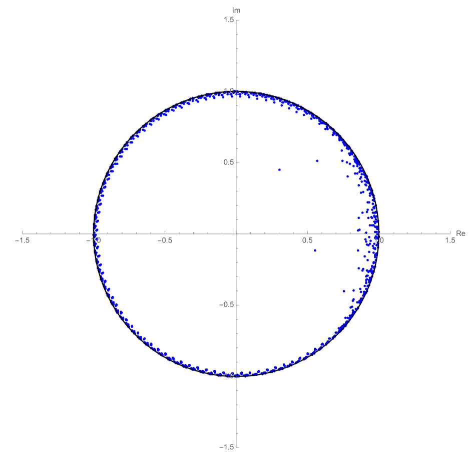


Figure: $\{\gamma_{60}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ case

- 今回はfinitely dependentの場合に限って計算したが，Peres-Virágの場合との本質的な違いはランダム冪級数の共分散から決まるスペクトル関数の零点が$r\to 1$で単位円周上の点に収束するかどうかとその零点の多重度であった．より一般的なガウス過程で計算できるはず．
- その第一歩として，finitely dependentやより一般の定常複素ガウス過程の場合で零点の個数の分散の漸近挙動を計算する必要がある．分散は一般にEdelman-Kostlan同様にガウス型解析関数の場合は次で書ける：

$$\mathbf{Var}N_f(r)=\frac{1}{4\pi^2}\int_D\int_D \Delta_z\Delta_w\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(\vartheta_f(z,w)\right)d^2zd^2w.$$

ここで，fは$\mathbb{D}$上のガウス型解析関数で$D\subset\mathbb{D}$は十分良い領域である．また，$K_f(z,w)=\mathbf{E}[f(z)\overline{f(w)}]$であるとするとき，

$$\vartheta_f(z,w)=\frac{|K_f(z,w)|^2}{K_f(z,z)K_f(w,w)}.$$

- 分散は計算がハードであるだけでなく，正確な漸近挙動を捉えるにはより繊細な3変数多項式あるいは級数の零点の振る舞いの解析が必要となる．
- Peres-Virágの場合，すなわち，独立同分布の複素ガウス型確率変数を係数に持つランダム冪級数は解析接続によって，$\mathbb{D}$の外側に拡張できないことが知られている．これは零点が自然境界に集積していることが原因であるが，定常複素ガウス過程を係数に持つ場合，我々の結果が示唆していることは（平均の意味では）零点の個数は減少している．定常複素ガウス過程を係数に持つ場合でも$\mathbb{D}$の外側に解析接続できないのだろうか？

Reference:

- Bordenave, C., Chafaï, D., Garcá-Zelada, D.: Convergence of the spectral radius of a random matrix through its characteristic polynomial. Probability Theory and Related Fields, 2020.
- Dym, H., McKean, H. P.: *Gaussian Process, Function Theory and the Inverse Spectral Problem*. Probability and Mathematical Statistics, vol. 31. Academic, New York, 1976.
- Hough, J. B., Krishnapur, M., Peres, Y., Virág, B.: Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point process, No. 51. University Lecture Series, 1st ed. Providence, Rhode Island:American Mathematical Society, 2009.
- Katori, M., Shirai, T.: Zeros of the i.i.d. Gaussian Laurent series on an annulus: weighted Szegő kernels and permanental-determinantal point process. arXiv preprint arXiv:2008.04177[math.PR] (2020) https://doi.org/10.1214/08-AOP404
- Kohei, N., Shirai, T.: Expected number of zeros of random power series with finitely dependent Gaussian coefficients. arXiv preprint arXiv:2106.02860[math.PR] (2021)
- Mukeru, S., Mulaudzi, M. P., Nzabanita, J., Mpanda, M. M.: Zeros of Gaussian power series with dependent random variables. Illinois J. Math. **64**, no. 4 (2020), 569–582. https://doi.org/10.1215/00192082-8720490
- Peres, Y., Virág, B.: Zeros of the i.i.d. gaussian power series: a conformally invariant determinantal process. Acta Math. **194**, no. 1 (2005), 1–35. https://doi.org/10.1007/BF02392515
- Wall, C.T.C.: Singular points of plane curves. London Mathematical Society Student Texts, vol. 63, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.