q-貴金属数とその収束半径

任　鑫　(関西大学大学院理工学研究科)

自己紹介

- 氏名：任　鑫
- 国籍：中国
- 所属：関西大学大学院理工学研究科　総合理工学専攻　数学分野　博士１年生
- 指導教員：和久井　道久
- 研究テーマ：有理数と無理数の q-変形について

研究動機

数学や理論物理学では、q-変形は量子化を意味することが多く、その逆も同様である。代数学、幾何学および解析学分野においては、q-変形が導入され、数学で詳細に研究されてきた。量子化されたものは、q の関数であり、通常は多項式またはべき級数である。フランスの数学者 Sophie Morier-Genoud と Valentin Ovsienko は有理数の組み合わせ論的性質と無理数の数論的性質に基づいて、有理数と無理数の q-変形を定義した。この有理数と無理数の q-変形は組み合わせ論、数論、量子代数、結び目理論、数理物理学等と関係している。本研究では、特別な無理数（貴金属数）の q-変形について考える。

はじめに

一般に、q-変形の定義には文脈により様々なものがあるが、「良い」q-変形の定義は、 少なくとも次の 2 つのことを満たさなければならない。

- q が 1 に近づく極限で元の対象になる。
- 量子化された対象に対して、その係数は、組み合わせ論的な意味を持つ。

これに基づき、Morier-Genoud と Ovsienko は有理数と無理数の q-変形を定義した。

整数の q-変形

q を形式的な変数とする。任意の非負の整数 n に対し、n の q-変形を以下のように定義する。

$$[n]_q := \begin{cases} 0 & \text{for } n = 0, \\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} & \text{for } n \geq 1. \end{cases}$$

正則連分数

有理数 $\frac{r}{s} > 1$ （ここで r と $s \neq 0$ は互いに素な整数と仮定）に対し、以下の正則連分数展開を定義し、$\frac{r}{s} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ と記す。

$$\frac{r}{s} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

各 $a_i \geq 1$ である。更に、$n = 2m$ をとると、この正則連分数展開が一意に定まる。

正則連分数の q-変形と有理数の q-変形

Morier-Genoud と Ovsienko は正則連分数の q-変形を次のように定義した。

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{2m}]_q := [a_1]_q + \cfrac{q^{a_1}}{[a_2]_{q^{-1}} + \cfrac{q^{-a_2}}{[a_3]_q + \cfrac{q^{a_3}}{[a_4]_{q^{-1}} + \cfrac{q^{-a_4}}{\ddots\, \cfrac{}{[a_{2m-1}]_q + \cfrac{q^{a_{2m-1}}}{[a_{2m}]_{q^{-1}}}}}}}}$$

この式を適当に変形すると、以下のような二つの互いに素である多項式の商で表すことができる。これを有理数 $\frac{r}{s}$ の q-変形（あるいは q-有理数）と呼ぶ。

$$\left[\frac{r}{s}\right]_q := [a_1, a_2, \ldots, a_{2m}]_q$$

例

$\frac{5}{2} = [2, 2]$ であり、その q-変形は $\left[\frac{5}{2}\right]_q = [2]_q + \frac{q^2}{[2]_{q^{-1}}} = \frac{1 + 2q + q^2 + q^3}{1 + q}$ である。

無理数の q-変形

無理数 $x > 1$ に対し、x に収束する任意の有理数列 $(x_k)_{k\geq 1}$ に対して、その q-変形 $([x_k]_q)_{k\geq 1}$ を考える。S.Morier-Genoud と V.Ovsienko は、k が大きくなるにつれて $[x_k]_q$ の q に関する形式的なべき級数の係数が安定することを証明した。無理数 $x > 1$ は次のようなべき級数として定義される。

$$[x]_q = \sum_{s=0}^{\infty} \varkappa_s q^s \quad \left(\varkappa_s = \lim_{k\to\infty} \varkappa_{k,s}\right)$$

貴金属とその q-変形

次の式を満たす無理数 x を貴金属数という。

$$x = \frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2} = [n, n, \ldots, n, \ldots]$$

この q-変形 $[x]_q$ を q-貴金属数という。特に、$n = 1, 2$ の場合には、それぞれを q-黄金数と q-白銀数と呼ぶ。

q-貴金属の収束半径 (1)

無理数の q-変形はべき級数として表されるから、q を複素数と仮定し、その収束半径を考えることができる。正則連分数の q-変形の定義を用い、適当に変形し、q-貴金属数 $[x]_q$ は以下のように表すことができる。

$$[x]_q = \frac{q[n]_q + (q^n+1)(q-1) + \sqrt{\mathcal{D}([\overline{n}]_q)}}{2q}$$

q-貴金属の収束半径 (2)

$$\mathcal{D}([\overline{n}]_q) = (1 - q + q^2)(1 + \sum_{t=1}^{n-1} tq^t + (n+2)q^n + \sum_{t=n+1}^{2n-1} (2n-t)q^t + q^{2n})$$

複素解析の手法を用い、$[x]_q$ の収束半径は $\mathcal{D}([\overline{n}]_q)$ の零点により得られる。すると、q-貴金属数の収束半径について、以下の結果を得られる。

主定理

q-貴金属数の収束半径を $R_{(n)}$ と記し、q-黄金数の収束半径は最小である。すなわち、

$$R_{(n)} \geq R_{(1)}$$

である。

Maple の計算例 (小数点の 5 桁まで)

n	$R_{(n)}$	n	$R_{(n)}$
1	0.38197	6	0.74444
2	0.53101	7	0.76933
3	0.59719	8	0.77406
4	0.65060	9	0.78191
5	0.69918	10	0.79338

まとめと参考文献

まとめ：この定理より、q-貴金属数は q-黄金数によりよい収束性を持ち、少なくとも、q-黄金数の収束半径としての円内で収束することが分かった。

参考文献：Xin Ren, On radiuses of convergence of q-metallic numbers and related q-rational numbers, preprint, arxiv.org/abs/2110.14342, 2021.