長期記憶性を持つサープラスの破産確率の推定

概要：古典的な破産理論の枠組みでは保険会社のサープラスは複合ポアソン過程を用いてモデル化されてきた. しかし, クレーム額がIIDであることを仮定するのはしばしば現実に即さないことがある. そこで本研究では, クレーム額が長期記憶性を持つと仮定した上で, ドリフト付き非整数ブラウン運動でサープラスをモデル化し, Malliavin解析を用いて破産確率の推定を行った.

発表者:中村咲太(早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 清水研究室 修士2年)
共著者:清水泰隆(早稲田大学 理工学術院 基幹理工学部)

2021年11月13日

研究の目的

次の確率過程で与えられるサープラスのモデルを考える：

$$X_t^\sigma = u + \sigma\theta t - \sigma W_t^H \quad (0 \leq t \leq T). \tag{1}$$

ただし

- $u, \theta > 0$: 既知のパラメータ
- W_t^H ; ハースト指数 $H > \frac{1}{2}$ が既知の非整数ブラウン運動
- $\sigma > 0$: 未知のパラメータ.

本研究の目的

時刻 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T_0 < T$ における離散データ $\left(X_{t_i}^\sigma\right)_{i\in\mathbb{N}_0}$ から破産確率：

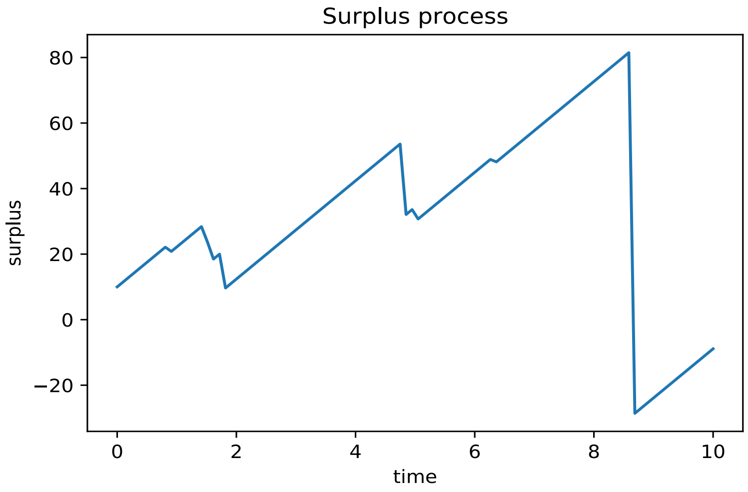
$$\Psi(\sigma) = \mathbb{P}\left(\inf_{0\leq t\leq T} X_t^\sigma < 0\right)$$

の推定を行いたい.

研究背景

古典的破産理論の枠組みでは以下のサープラスのモデルを採択していた．

$$Y_t^n = u + \theta^{(n)} t - \sum_{i=1}^{N_t^{(n)}} U_i$$



ただし，

- $u > 0$：初期資産
- $\theta^{(n)} > 0$：保険料 (円/時間)
- $N_t^{(n)}$：intensity が n のポアソン過程（クレーム件数）
- U_i：IID な確率変数（クレーム額）

しかし，クレーム額に IID を仮定するのは現実的ではない．

U_i が長期記憶性を持つとき，正規化定数列 ϕ_n に対してある $\rho > 0$ で

$$\frac{Y_t^n}{\phi_n} \xrightarrow{d} u + \rho t - W_t^H \quad \text{in} \quad \mathbb{D}[0, \infty) \quad (n \to \infty),$$

となることが知られているので，サープラスのモデルとして (1) を採択した．

主結果

次の $\boldsymbol{\sigma}$ の推定量を考える：

$$\widehat{\sigma}_{t,n} := \left(\frac{\sum_{i=1}^{[nt]} \left| X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}} \right|^p}{c_p n^{1-pH} t} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad \left(\text{ただし}, c_p = \frac{2^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right)$$

主結果

$$\partial_\sigma \Psi(\sigma) = \mathbb{E}\left[1_{[\sigma \sup_{0 \le t \le T} (W_t^H - \theta t) < u]} \delta^{W^H} \left(\frac{u_A(\cdot) \sup_{0 \le t \le T} (W_t^H - \theta t)}{\sigma \int_0^T \psi(Y_t) dt} \right) \right],$$

$$\sqrt{n} \left(\Psi\left(\widehat{\sigma}_{t,n}\right) - \Psi(\sigma) \right) \xrightarrow{d} \frac{v_1 \sigma}{p c_p} \partial_\sigma \psi(\sigma) W_t \quad \text{in} \quad \mathbb{D}[0, T) \quad (n \to \infty).$$

ただし，

$$v_1^2 = \mu_p + 2\sum_{j\geq 1}\left(\gamma_p\left(\rho_H(j)\right) - \gamma_p(0)\right),$$

$$\mu_p = 2^p\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\right),$$

$$\gamma_p(x) = (1-x^2)^{\frac{p+1}{2}} 2^p \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2k}}{\pi(2k)!}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+k\right)^2,$$

$$\rho_H(n) = \frac{1}{2}\left((n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}\right)$$

$$u_A(t) = \frac{d_H}{c_H\Gamma(H-\frac{1}{2})} t^{\frac{1}{2}-H} D_{T-}^{H-\frac{1}{2}}\left[(\cdot)^{2H-1} D_{0+}^{H-\frac{1}{2}}\left((\cdot)^{\frac{1}{2}-H}\psi(Y_\cdot)\right)(\cdot)\right](t)$$

$(D_{T-}^{H-\frac{1}{2}}, D_{0+}^{H-\frac{1}{2}}$: fractional derivative)

$W_t : W_t^H$ と独立なウィナー過程
$\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}_+)$ は以下を満たす滑らかな関数：

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & (x \leq \frac{u}{2\sigma}) \\ 0 & (x \geq \frac{u}{\sigma}) \end{cases}.$$

参考文献

[1] Corcuera, J. M. Nualart, D. (2006). Power variation of some integral fractional processes. *Bernoulli* **12** (2006), no. 4, 713-735.

[2] Gobet, E. and Kohatsu-Higa, A. (2003). Computation of Greeks for barrier and look-back options using Malliavin calculus. *Electron. Comm. Probab.* **8** (2003), 51-62.

[3] Lanjri Z. N. and Nualart, D. (2003). Smoothness of the law of the supremum of the fractional Brownian motion. *Electron. Comm. Probab.* **8** (2003), 102-111.

[4] Michna, Z. (1998). Self-similar processes in collective risk theory, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, **11**, (4), 429-448.