高頻度データによるエルゴード的拡散過程モデルのパラメータ変化時刻の推定

渡名喜 庸蔵[1], 貝野友祐[2], 内田雅之[1]

1. 大阪大学大学院 基礎工学研究科,
2. 神戸大学大学院 海事科学研究科

研究の動機および位置づけ

変化点問題はもともと品質管理の分野で注目された．その分野では，品質維持のために品質に変化がないかを調べ，もし変化があれば，その変化が起きた時刻を調査する必要があるので変化点問題について考えることは重要である．近年では，変化点問題は金融や経済学，医学など変化に関心のある分野で発展してきた．とくに拡散過程モデルは株価の変動などを記述するモデルであり，我々はそのような確率的現象の揺らぎ (拡散パラメータ) および長期的な動向 (ドリフトパラメータ) の変化に関心がある．
高頻度データに基づくエルゴード的拡散過程モデルのパラメータ変化検出に関する先行研究はいくつかあるが (例えば Negri and Nishiyama [1] や Tonaki et al. [2])，変化時刻の推定についてはほとんどない．そこで本研究では，ある変化検出法により拡散パラメータまたはドリフトパラメータの変化が検出された場合のその変化時刻の推定について考える．

モデル

d 次元拡散過程モデル

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t, \beta)\mathrm{d}t + a(X_t, \alpha)\mathrm{d}W_t, \quad X_0 = x_0.$$

- パラメータ空間 $\Theta = \Theta_A \times \Theta_B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ はコンパクト凸集合,
- $\theta = (\alpha, \beta) \in \Theta$ は未知パラメータ, $\theta^* = (\alpha^*, \beta^*)$ は真値,
- $\{W_t\}_{t \geq 0}$ は r 次元標準 Wiener 過程,
- 拡散係数 $a : \mathbb{R}^d \times \Theta_A \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r$, ドリフト係数 $b : \mathbb{R}^d \times \Theta_B \to \mathbb{R}^d$ は θ を除いて既知の関数

離散観測データ $\{X_{t_i}\}_{i=0}^n$, $t_i = ih_n$ (h_n はきざみ幅).
$n \to \infty$ のとき

- $h_n \to 0$ (高頻度観測),
- $T = nh_n \to \infty$ (長期観測),
- $nh_n^2 \to 0$.

拡散過程モデルにおけるパラメータ変化は右図のようなものである. 本発表では, このようにパラメータが変化する拡散過程モデルのパラメータ変化時刻の推定問題について考える.

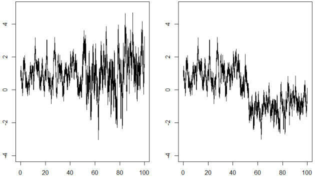

Figure 1: 左は拡散パラメータが変化, 右はドリフトパラメータが変化した様子.

ドリフトパラメータの変化時刻の推定 *

[1] や [2] などの変化検出法により拡散パラメータ α の変化は検出されなかったが，ドリフトパラメータ β の変化は検出されたと仮定する．

設定：α は変化しないが β は 1 回だけ変化する

- $\tau_*^\beta \in (0,1)$ が存在して $\beta^* = \begin{cases} \beta_{1,n}^* =: \beta_1^*, & t \in [0, \tau_*^\beta T), \\ \beta_{2,n}^* =: \beta_2^*, & t \in [\tau_*^\beta T, T]. \end{cases}$
  $(\beta_1^*, \beta_2^* \in \mathrm{Int}\Theta_B,\ \beta_1^* \neq \beta_2^*)$
- $\beta_1^*, \beta_2^* \to \beta_0$, $\vartheta_{\beta,n} = |\beta_1^* - \beta_2^*| =: \vartheta_\beta$ に対して $\vartheta_\beta \to 0$, $T\vartheta_\beta^2 \to \infty$ とする．
  (変化が小さい場合を考える)

コントラスト関数を β が 1 回変化することを考慮して

$$\Psi_n(\tau : \beta_1, \beta_2|\alpha) = \sum_{i=1}^{[n\tau]} G_i(\beta_1|\alpha) + \sum_{i=[n\tau]+1}^{n} G_i(\beta_2|\alpha),$$

$$G_i(\beta|\alpha) = h_n^{-1}\mathrm{tr}\left[A^{-1}(X_{t_{i-1}}, \alpha)(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} - h_n b(X_{t_{i-1}}, \beta))^{\otimes 2}\right]$$

と定める ($M^{\otimes 2} = MM^\mathsf{T}$, M^T は M の転置を表し，$A(x,\alpha) = a(x,\alpha)^{\otimes 2}$)．

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha^*) = O_p(1), \quad \sqrt{T}(\hat{\beta}_k - \beta_k^*) = O_p(1) \quad (k = 1, 2)$$

を満たす推定量 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}_k$ をとる．

注意．推定量 $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ は [1] や [2] などの変化検出法により変化が起きていない区間 $[0, \tau_1 T]$, $[\tau_2 T, T]$ $(\tau_1 < \tau_*^\beta < \tau_2)$ を探し，その区間のデータを用いてそれぞれ構成する．

*拡散パラメータの変化時刻の推定のについては Tonaki et al. [3] を参照．

ドリフトパラメータの変化時刻の推定

τ_*^β の推定量 $\hat{\tau}_n^\beta$ を最小コントラスト推定量

$$\hat{\tau}_n^\beta = \operatorname*{argmin}_{\tau \in [0,1]} \Psi_n(\tau : \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 | \hat{\alpha})$$

で定める．このとき

$$\Xi(x, \alpha, \beta) = \left[\partial_{\beta^{\ell_1}} b(x, \beta)^\mathsf{T} A^{-1}(x, \alpha) \partial_{\beta^{\ell_2}} b(x, \beta) \right]_{\ell_1, \ell_2 = 1}^{q},$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \vartheta_\beta^{-1} (\beta_1^* - \beta_2^*),$$

$$\mathcal{J} = e^\mathsf{T} \int_{\mathbb{R}^d} \Xi(x, \alpha^*, \beta_0) \mathrm{d}\mu_{(\alpha^*, \beta_0)}(x) e,$$

$$\mathbb{G}(v) = -2\mathcal{J}^{1/2} \mathbb{W}(v) + \mathcal{J}|v| \quad (v \in \mathbb{R})$$

とおく．ただし $\mathbb{W}$ は two-sided standard Wiener process とする．

Theorem 1

$\vartheta_\beta \to 0$, $T\vartheta_\beta^2 \to \infty$ のとき正則条件の下，

$$T\vartheta_\beta^2 (\hat{\tau}_n^\beta - \tau_*^\beta) \xrightarrow{d} \operatorname*{argmin}_{v \in \mathbb{R}} \mathbb{G}(v)$$

が成り立つ．

数値シミュレーション

1-dimensional Ornstein-Uhlenbeck process

$$\mathrm{d}X_t = -\beta_1(X_t - \beta_2)\mathrm{d}t + \alpha \mathrm{d}W_t,\ X_0 = x_0$$

- α は変化しない, β_1 は変化しない,
  β_2 は $t = \tau_*^\beta T$ で $\beta_{2,1}^*$ から $\beta_{2,2}^*$ に変化する.
- イテレーション回数 1000.
- $n = 10^6$, $h_n = n^{-4/7} \approx 3.73 \times 10^{-4}$,
  $T = n^{3/7} \approx 373$, $nh_n^2 = n^{-1/7} \approx 0.14$.
- $\vartheta_\beta = n^{-1/8} \approx 0.1778$, $T\vartheta_\beta^2 = n^{5/28} \approx 11.8$.
- $x_0 = 5$, $\alpha^* = 0.5$, $\beta_1^* = 2.5$, $\beta_{2,0} = 5$,
  $\beta_{2,1}^* = 5 + \vartheta_\beta$, $\beta_{2,2}^* = 5$, $\tau_*^\beta = 0.5$.
- $(\beta_1^*, \beta_{2,1}^*)$, $(\beta_1^*, \beta_{2,2}^*)$ の推定量 $(\hat\beta_{1,1}, \hat\beta_{2,1})$,
  $(\hat\beta_{1,2}, \hat\beta_{2,2})$ はそれぞれ $[0, \frac{T}{4}]$, $[\frac{3T}{4}, T]$ から構成.

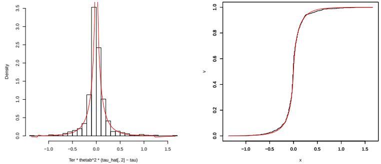

Figure 2: $T\vartheta_\beta^2(\hat\tau_n^\beta - \tau_*^\beta)$ のヒストグラムおよび経験分布関数 (黒色) と $\mathrm{argmin}_{v\in\mathbb{R}}\mathbb{G}(v)$ の密度関数および分布関数 (赤色).

Table 1: 推定量の平均と標準偏差.

$\hat\beta_{1,1}$	$\hat\beta_{2,1}$	$\hat\beta_{1,2}$	$\hat\beta_{2,2}$	$\hat\tau_n^\beta$
2.54981	5.17730	2.54314	4.99981	0.49797
(0.22565)	(0.02047)	(0.24675)	(0.02030)	(0.01341)

- ヒストグラム, 経験分布関数ともに漸近分布にほとんど一致し, 良いパフォーマンスをしていることがわかる.

参考文献.

[1] Negri, I., Nishiyama, Y. (2017). Z-process method for change point problems with applications to discretely observed diffusion processes. Statistical Methods and Applications, 26, 231-250.

[2] Tonaki, Y., Kaino, Y., Uchida, M. (2020). Adaptive tests for parameter changes in ergodic diffusion processes from discrete observations. arXiv:2004.13998. To appear in Statistical Inference for Stochastic Processes.

[3] Tonaki, Y., Kaino, Y., Uchida, M. (2021). Estimation for change point of discretely observed ergodic diffusion processes. arXiv:2102.06871.