

移流項付きプラトー問題

塚本悠暉

明治大学 PD(研究・知財戦略機構)

専門: 非線形楕円型方程式, 幾何学的測度論

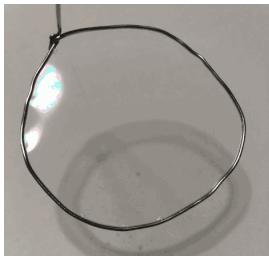
自然界では石鹸膜などに現れる極小曲面 (プラトー問題) について考察する.

本発表では移流項付きプラトー問題について解の存在条件を調べる.

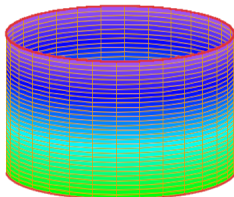
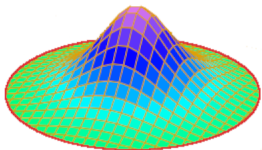
この問題は風が吹いている中で石鹸膜が張れるかという問題に対応している.

November, 2021

石鹸膜の性質: (局所的に) 面積が最小となる曲面で張られる.



張られる石鹸膜の例



図のように石鹸膜は張られない

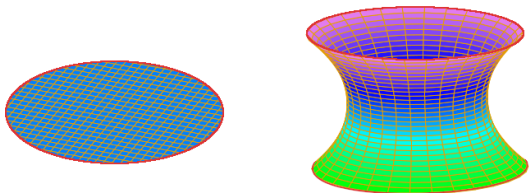
プラトー問題

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \phi & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

曲面 $(x, u(x))$ は極小曲面となる.

極小曲面: 局所的に面積が最小となる曲面.

(平均曲率が0の曲面)



極小曲面の例

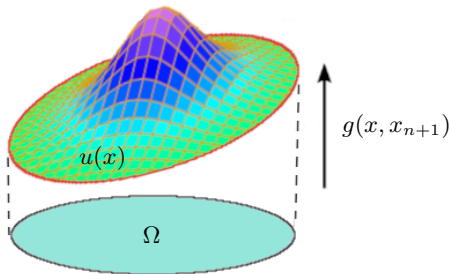
次に風が吹いている中で石鹼膜が張れるか考察する.

移流項付きプラトー問題

$g \in W^{1,p}(\Omega \times \mathbb{R})$: 十分ノルムが小さい.

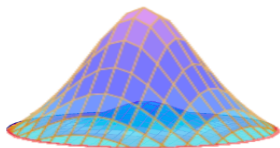
このとき以下を満たす解 $u \in W^{2,q}(\Omega)$ が存在する.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = g(x, u(x)) \cdot \nu(\nabla u) & \text{in } \Omega, \\ u = \phi & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

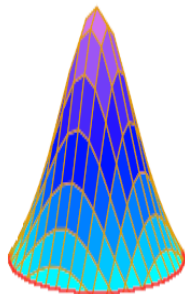


Remarks

- (1) 解の一意性は成り立たない。
ただし g に単調性の条件を加えれば一意性が示せる。
- (2) $g \in W^{1,p}(\Omega \times \mathbb{R})$ のノルムが大きくても解が存在しないとは限らない。
- (3) より一般の $g(x, u(x), \nabla u(x))$ にしても成り立つ。



一意性が成り立たない例



g のノルムが大きい例