走化性方程式系に対するテスト関数の多次元版の開拓
ー 誘引・反発型走化性方程式系の解挙動の解明 ー

千代 祐太朗
（東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士後期課程1年）

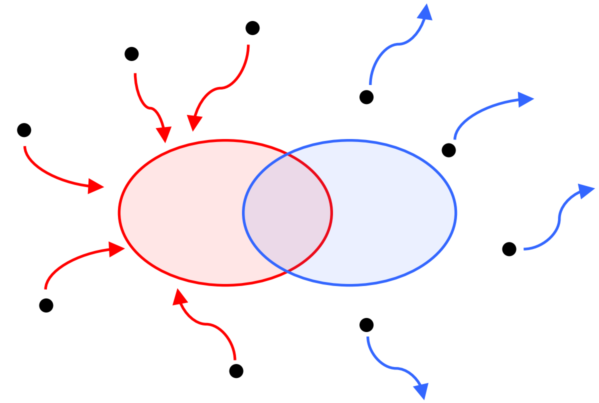
研究の動機・位置付け

生物の化学物質への誘引現象を表す走化性方程式系は，テスト関数と呼ばれる関数を導入することで研究されている．本研究の目的は，新たなテスト関数の開発により，化学物質から遠ざかる現象をも記述する方程式系の考察を可能にする方法を構築することである．この研究は，誘引現象のみを記述する方程式系に対する研究の拡張といえる．

誘引・反発型走化性方程式系

$$
\begin{cases}
u_t = \Delta u \underbrace{- \nabla \cdot \left(\frac{u}{v} \nabla v \right)}_{\text{誘引項}} \underbrace{+ \nabla \cdot \left(\frac{u}{w} \nabla w \right)}_{\text{反発項}}, \\
v_t = \Delta v - v + u, \\
w_t = \Delta w - w + u
\end{cases}
$$

＋Neumann 境界条件，初期条件



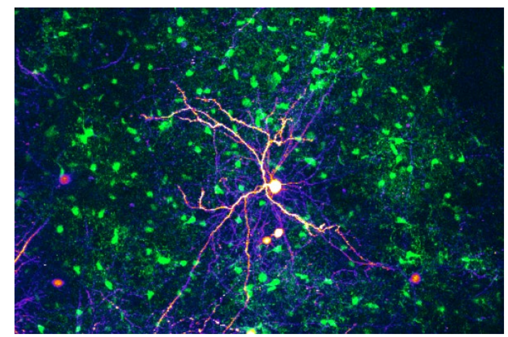
● ：生物

：化学誘引物質　　：化学忌避物質

u ：生物の密度　　v ：化学誘引物質の濃度　　w ：化学忌避物質の濃度

現象

- 生物が誘引物質に引き寄せられ，忌避物質から遠ざかる現象 ［Painter-Hillen（2002）］
- アルツハイマー病で観測されるある細胞の凝縮現象 ［Luca et al.（2003）］



出典：
https://www.med.nagoya-u.ac.jp/cel-bio/en/research/205.html

解の爆発

生物，細胞の過度な集中

VS.

解の有界性

生物，細胞の適度な集中

本研究のテーマ！

テスト関数1 ー 指数・感受度組込型テスト関数

従来型の方程式系

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot \left(\frac{u}{v} \nabla v \right), \\ v_t = \Delta v - v + u \end{cases}$$

$$f(u,v) := u^{p-1} \exp\left(-\frac{1}{v} \right)$$

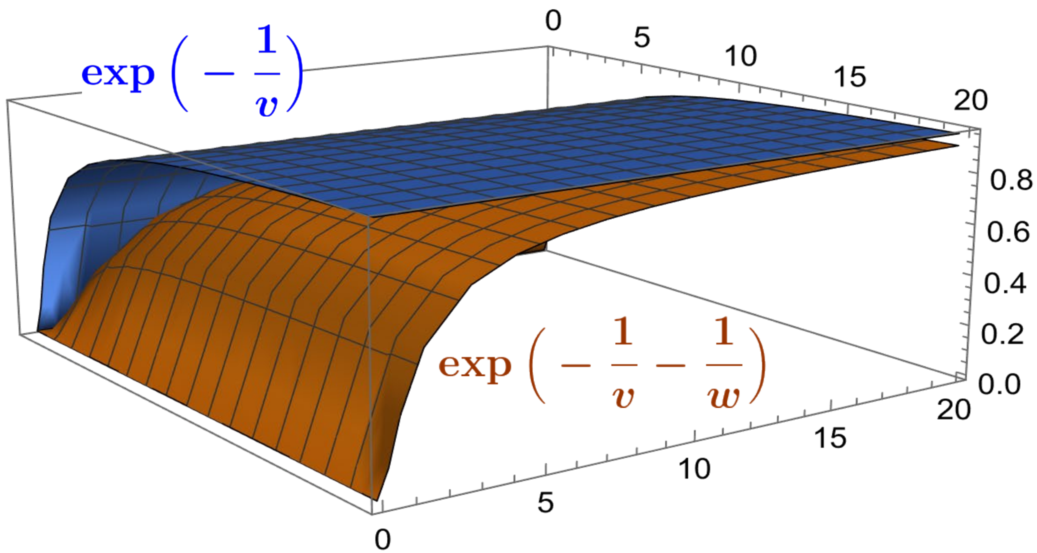
[Mizukami-Yokota（2017）]

本研究の方程式系

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) + \nabla \cdot \left(\frac{u}{w} \nabla w \right), \\ v_t = \Delta v - v + u, \\ w_t = \Delta w - w + u \end{cases}$$

$$f(u,v,w) := u^{p-1} \exp\left(-\frac{1}{v} - \frac{1}{w} \right)$$

[新たに加わった w の効果も追加]



一方向に広がる曲面 を

二方向に広がる曲面 に補正

解の有界性に関する結果を2つ導出した！

テスト関数2 ー 誘引反発スケール融合負冪型テスト関数

従来型の方程式系

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot \left(\dfrac{u}{v}\nabla v\right), \\ v_t = \Delta v - v + u \end{cases}$$

$$g(u,v) := u^{p-1} \cdot \frac{1}{v}$$

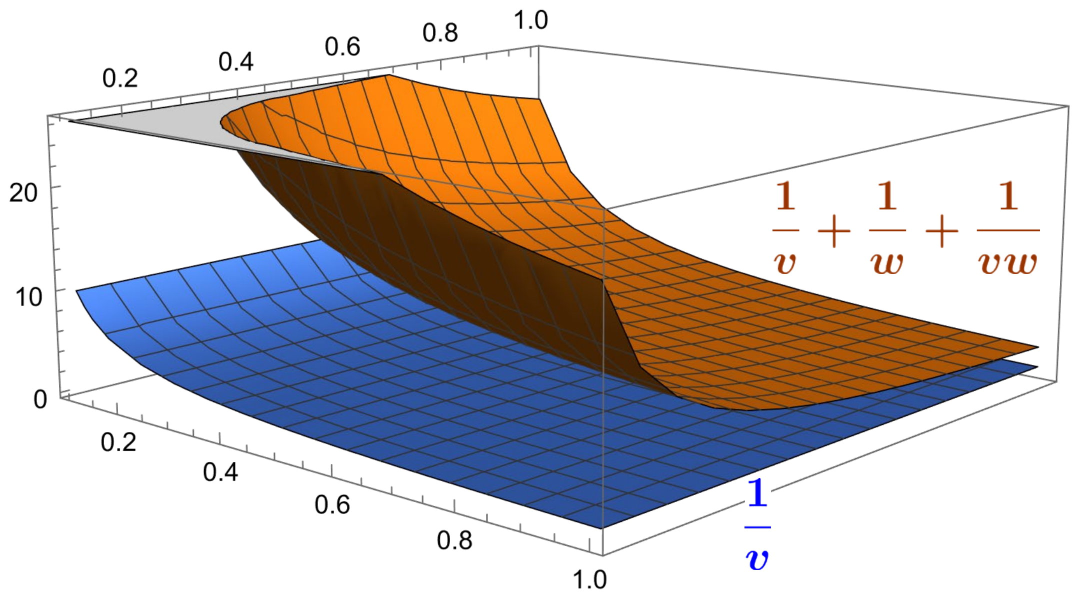
[Ding（2018），Jia-Yang（2019）]

本研究の方程式系

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot \left(\dfrac{u}{v}\nabla v\right) + \nabla \cdot \left(\dfrac{u}{w}\nabla w\right), \\ v_t = \Delta v - v + u, \\ w_t = \Delta w - w + u \end{cases}$$

$$g(u,v,w) := u^{p-1} \cdot \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{vw}\right)$$

[新たに加わった w の効果も追加し，
さらに負冪の積で補正]



原点付近での値の増え方 を補正

↳ 解の有界性に関する結果，
漸近挙動に関する結果
を導出した！

研究成果のまとめ

研究成果　以下の成果はすべて「多次元版テスト関数」の開発によって得られた:

- **成果1**　ロジスティック項付きの誘引・反発型走化性方程式系の解の有界性
  国際誌『Journal of Mathematical Analysis and Applications』で出版済（2021）
- **成果2**　ロジスティック項がない誘引・反発型走化性方程式系の解の有界性
  国際誌『Electronic Journal of Differential Equations』で出版済（2021）
- **成果3**　非線形の拡散項をもつ誘引・反発型走化性方程式系の解の有界性
  国際誌『Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik』に投稿中,
  arXivでオンライン公開中
- **成果4**　非線形の拡散項をもつ誘引・反発型走化性方程式系の解の漸近挙動
  論文作成中

今後の展望

- **展望1**　第2，第3方程式の非線形化
  [Cagliari大学(イタリア)の Giuseppe Viglialoro 教授との共同研究を実施中]
- **展望2**　腫瘍血管新生方程式系等の新しいモデルへの応用