非線形の走化性をもつ走化性方程式系の解の爆発解析に対する新たなアプローチ

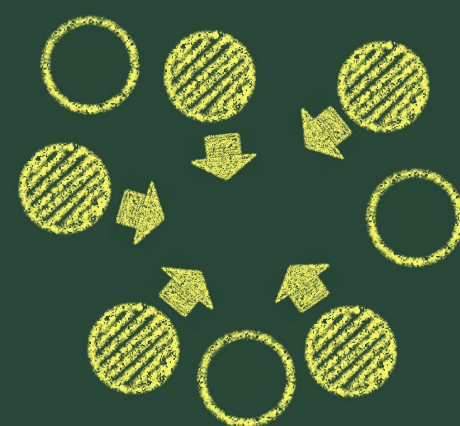
田中 悠也

(東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士後期課程1年)

研究の動機・位置づけ

生物の自然な死滅を考慮した走化性方程式では，
単純な場合の解の挙動がよく研究されている．
しかし，走化性の強弱も考慮した非線形の場合の研究は
まだ少ない．そこで本研究では，非線形の走化性をもつ
走化性方程式の解の爆発の結果を得ようと考えた．
この研究では，非線形の走化性をもつ走化性方程式系の
解の爆発解析に対する新たなアプローチを開発した．

走化性・・・ある誘引物質に
集中する性質



考える走化性方程式の紹介

走化性方程式系

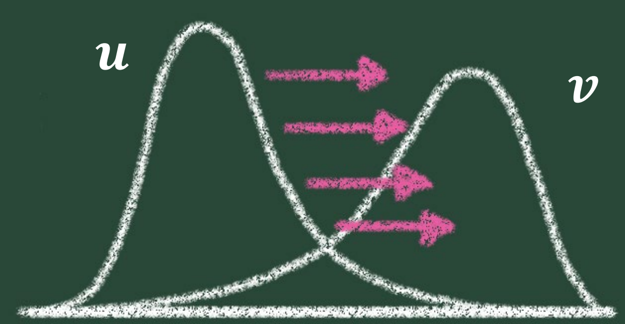
$$
\begin{cases}
u_t = \Delta u \underbrace{- \nabla \cdot (u^{\alpha} \nabla v)}_{\text{走化性項}} + u(1 - u^{\kappa}) \\
0 = \Delta v - v + u
\end{cases}
$$

$+$ Neumann境界条件, 初期条件

u : 生物の密度

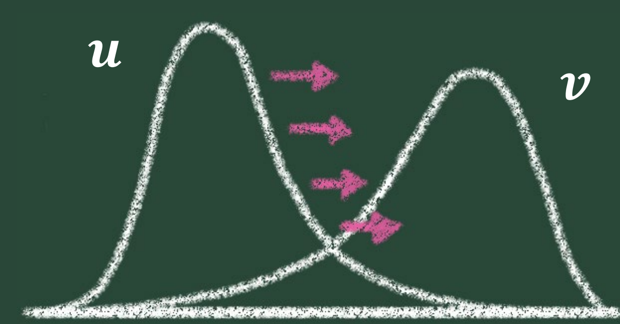
v : 化学物質の濃度

- $\alpha > 1$ のとき



走化性が強い

- $\alpha < 1$ のとき



走化性が弱い

Q. 走化性の強弱によって, 生物の集中現象(解の爆発)は起こるのか?

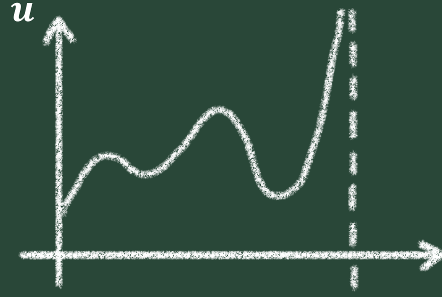
「先行研究」と「本研究の難点」

$$
\begin{cases}
u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u^{\alpha} \nabla v) + u(1 - u^{\kappa}) \\
0 = \Delta v - v + u
\end{cases}
$$

（予備概念）

解の爆発・・・生物の集中現象の記述

（生物の密度 u の最大値が時間とともに大きくなること）



先行研究（$\alpha = 1$のとき）

Winkler (2018)

$$\kappa < \frac{1}{6} \quad (n \in \{3,4\}), \quad \kappa < \frac{1}{2(n-1)} \quad (n \geq 5)$$ ⇒ 解が爆発

▶ Δu と $\nabla \cdot (u \nabla v)$ の線形性に依存した証明

本研究の難点

非線形 ($\alpha \neq 1$) の場合, 線形構造が崩れてしまい, 証明が非常に困難になる.

新たなアプローチ

非線形構造をどう扱うか？ ⇒ 解のプロファイルから，線形構造を創り出す！

解のプロファイル

$$u(x,t) \le L|x|^{-p(\alpha)}$$

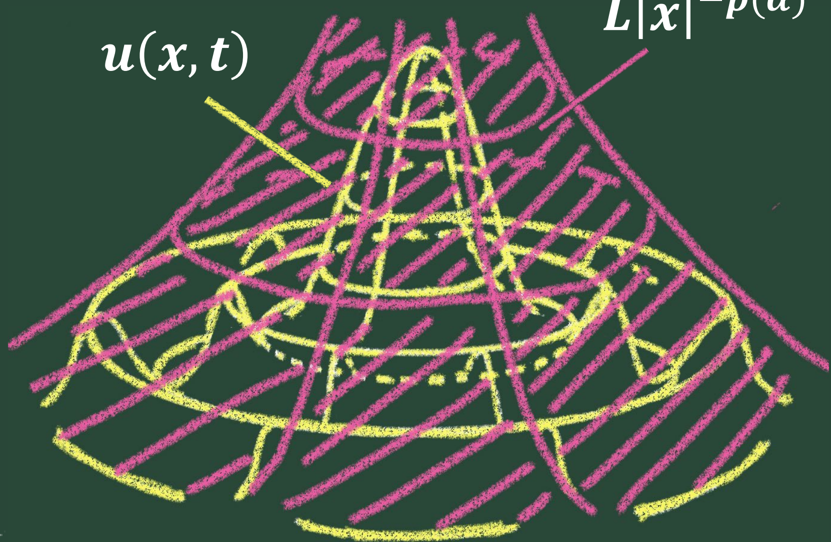
$\alpha < 1$のとき

$$u \ge u^{\alpha} \ge C|x|^{-(\alpha-1)\cdot p(\alpha)} \cdot u$$

$\alpha > 1$のとき

$$C|x|^{-(\alpha-1)\cdot p(\alpha)} \cdot u \ge u^{\alpha} \ge u$$

線形化！



$\alpha \ne 1$ でも解が爆発！

まとめとその後の発展

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \underline{\nabla \cdot (u^{\alpha} \nabla v)} + u(1 - u^{\kappa}) \\ 0 = \Delta v - v + u \end{cases}$$

まとめ

解のプロファイルから走化性項を線形化

$$u^{\alpha} \approx C|x|^{-(\alpha-1)\cdot p(\alpha)} \cdot u$$

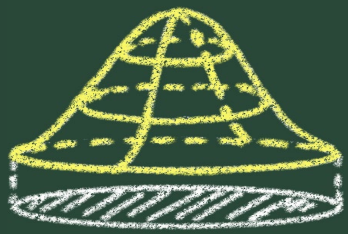
- 非線形の走化性項にも対応した新たなアプローチを開発!
- 10年以上未解決の問題に解答を与えた.

（国際誌「Nonlinear Anal., Real World Appl. (2022)」で採録決定済）

その後の発展

本研究のアイデアをもとに, 別のモデルでも結果を得た:

初期値が動径方向に単調減少 ⇒ 解が爆発



- 非線形拡散 … 国際誌「J. Math. Anal. Appl. (2022)」で採録決定済
- 退化型拡散 … 論文作成中（ロジスティック項付きでは本研究が初）