リー群の可換元のなす空間のホモトピー論

武田雅広 (京都大学　理学研究科　数学教室　D2)
本講演は京都大学の岸本大祐氏との共同研究に基づく

キーワード ··· 代数トポロジー、リー群、ホモロジー、

代数トポロジーは代数的な手法を用いて空間の性質を調べる分野である．本研究では
リー群の可換元のなす空間に関して行った研究について述べる．

リー群の可換元のなす空間 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ とは

リー群とは ··· 可微分構造と群構造が両立する性質の良い空間

- リー群の例

$$SU(n) \colon n \text{ 次特殊ユニタリ行列全体のなす群}$$

定義 G をリー群とする．このとき $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ を次で定義する．

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G) = \{(g_1, g_2, \ldots g_m) \in G^m | g_i g_j = g_j g_i \text{ for all } i, j\}$$

先行研究

- $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ と平坦束のある種のモジュライが一致
  $\Rightarrow$ 幾何学や物理学の方面からの先行研究

- Baird によって示された $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の有理係数コホモロジーとある不変式環の同型 ‘07
  $\Rightarrow$ 表現論との深い関係

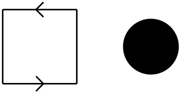
- Cohen らによる $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の安定分解 ‘10

ホモロジー

ホモロジーとは, 各自然数 n に対して空間の n 次元の穴の情報を表すアーベル群が対応するもの.

例 円周のホモロジーは 1 に対して穴に対応する $\mathbb{Z}$ が出てくる.

例 射影平面とはメビウスの帯の境界と 2 次元円板の境界を貼り合わせた空間のこと.



この射影平面のホモロジーには 1 に対して 2 倍すると消える穴に対応する $\mathbb{Z}/2$ が一つ出てくる.

空間の各次元のホモロジーは, 有限生成アーベル群の基本定理から

$$\mathbb{Z}^{\oplus n_0} \oplus \bigoplus_{p\colon \text{prime}} \bigoplus_{i} \mathbb{Z}/{p^i}^{\oplus n_{p,i}}$$

という形で書けることが多い. （空間が有限型 CW 複体であれば成り立つ.）

その場合, 素数 p に対して $\bigoplus_i \mathbb{Z}/{p^i}^{\oplus n_{p,i}}$ の部分を p-捩れと呼ぶ.

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の捩れ

定理（Baird）$p > n$ なる素数 p に対して, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, SU(n))$ のホモロジーは p-捩れを持たない.

一方, $p \leq n$ なる素数 p では捩れが存在するかどうか一部の場合を除いて分かっていなかった.

主定理 1　単純リー群 G に対して $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のホモロジーは 2-捩れを持つ.

主定理 2　$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, SU(n))$ のホモロジーは $p \leq n$ なる素数 p に対して p-捩れを持つ.

手法　$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の新たな分解方法を与えた.

例　$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, SU(2))$ は次のホモトピー押し出し図式で与えられる.

$$\begin{tikzcd}
S^2 \times S^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] & S^3 \arrow[d] \\
S^3 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2, SU(2))
\end{tikzcd}$$

ただしここで写像 f は商写像 $S^2 \times S^1 \to S^3$ と 2 倍写像の合成.

まとめと今後の目標

まとめ

- この研究の意義
  - $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ という様々な分野と関連する空間の新たな性質を知る.
- この研究で行ったこと
  - $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のホモロジーの捩れの存在をいくつかの場合で示した.
- この研究の独自性
  - $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ の新たな分解方法の発見.
- 苦労した点
  - 分解を一般の形で書き下すこと.
  - 捩れの存在を示すための組み合わせ的な議論.

今後の目標

- その他のリー群の場合に $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ は p-捩れを持つのか否か
- 今回発見した新たな分解を用いた $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^m, G)$ のより詳細な解析
- 上記の研究の表現論、幾何学への応用