正則保型形式について

庄司幸弘

東北大学・大学院理学研究科・数学専攻・博士課程前期(2 年)

- 正則保型形式とは？
  →豊富な対称性を備えた正則関数(存在そのものが奇跡といってよい).
- 整数論，幾何学，解析学の交差点によく登場する.
- フェルマーの最終定理の証明に重要な役割を果たした：

$$n \geq 3, x^n + y^n = z^n, x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow xyz = 0$$

1 準備

- $SL_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$
- $\mathbb{H} := \{\tau = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ (i は虚数単位)

  乗法群 $SL_2(\mathbb{Z})$ は $\mathbb{H}$ に一次分数変換として作用する：

$$\gamma\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

- 正整数 N に対し

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \mod N \right\}$$

  とおく．($N = 1$ に対し，$\Gamma_0(1) = SL_2(\mathbb{Z})$ となる．)

2　保型形式とは？

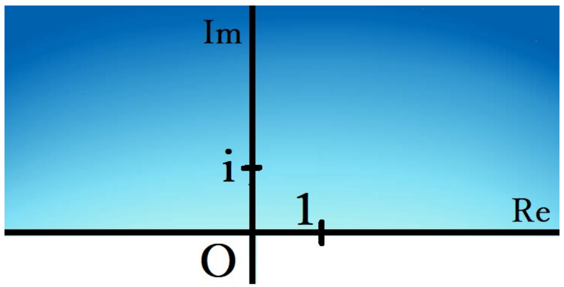
定義　kを整数とする．$\mathbb{H}$上の正則関数(すなわち，$\mathbb{H}$の各点で複素微分可能な関数)fであって，次の2つの条件を満たすものを$\Gamma_0(N)$に関する重さkの保型形式という：

(1) 任意の$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ と$\tau \in \mathbb{H}$に対し，

$$f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

を満たす．

(2) 任意の
$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$に対し，極限
$\lim_{\tau \to i\infty} (c\tau + d)^{-k} f(\alpha\tau)$ が収束する．



複素上半平面$\mathbb{H}$

3　具体例

$\tau \in \mathbb{H}$, $q = e^{2\pi i\tau}$ とする.

- (アイゼンシュタイン級数) 4 以上の偶数 k に対し

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n,\ \ q = e^{2\pi i\tau}$$

$$\left(\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}, \sigma_{k-1}(n) = \sum_{m>0, m|n} m^{k-1}\right)$$

は $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の保型形式を定める.

- (エータ積) $\tau \in \mathbb{H}$ に対して

$$\eta(\tau) = q_{24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),\ q_{24} = e^{\frac{2\pi i\tau}{24}}$$ と書く.

$$\Delta(\tau) = \eta(\tau)^{24} = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 + \ldots$$

とおく. Δ は $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ 12 の保型形式を定める.

4　保型形式のなす空間

- $M_k(\Gamma_0(N))$
$$:= \{\Gamma_0(N)\text{に関する重さ}k\text{の保型形式}\}$$

- $k, \ell \in \mathbb{Z}$に対し，$f \in M_k(\Gamma_0(N))$と$g \in M_\ell(\Gamma_0(N))$の積$fg$は重さ$k+\ell$の保型形式を定める．

- $M_*(\Gamma_0(N)) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma_0(N))$は和と積を備えた次数付き環になる．モジュラー曲線$\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}$の代数幾何的構造を反映している数学的対象．

- 修士論文では$M_*(\Gamma_0(N))$が重さの低い保型形式で生成されることを示し，生成元を具体的に記述した．