

基本解近似解法を用いた 磁性流体のHele-Shaw問題に対する数値計算

榊原 航也（岡山理科大学，理化学研究所）

下地 優作（明治大学大学院理工学研究科）

矢崎 成俊（明治大学理工学部）

異分野異業種研究交流会2021

2021年11月13日（土）

※引用文献にはリンクが設定されています。

※ご質問等は下地(shimoji@meiji.ac.jp)までご連絡ください。

ポスターの内容の詳細はこちらもご参照ください。

[K. Sakakibara, Y. Shimoji, and S. Yazaki, A simple numerical method for Hele-Shaw type problems by the method of fundamental solutions, arXiv:2105.14811, 2021.](#)



発表者自己紹介

- ・ 下地優作
- ・ 明治大学大学院理工学研究科数学専攻D2
- ・ 指導教員：矢崎成俊
- ・ 主な研究内容・対象：
磁性流体，Hele-Shaw問題，雪の結晶成長，
数値計算，SIRモデル
- ・ 修士課程→一般企業→博士課程
- ・ 国家資格キャリアコンサルタント

研究背景・動機

基本解近似解法(MFS)は主にポテンシャル問題に対するメッシュフリーの数値解法である。優れた特性を持つ数値計算手法である一方で、移動境界問題に対する応用例はまだあまり多くはない。今回はMFSの応用の幅の拡大につながるであろう、移動境界問題のひとつである磁性流体のHele-Shaw問題に対するMFSの応用結果を報告する。

本研究には実験，シミュレーション動画があります。

[こちらから実験動画をご覧いただけます](#)

[こちらから数値シミュレーション動画をご覧いただけます](#)

ポスターの概要



基本解近似解法

(the Method of Fundamental Solutions, MFS)

ポテンシャル問題に対するメッシュフリーの数値解法の一つであり、近似解を「基本解の線形結合で求める」という素朴なアイディアに基づく。

選点や特異点を適切に決めれば、近似解の**収束誤差**が選点数に応じて**指数的に減衰**することが知られている¹。

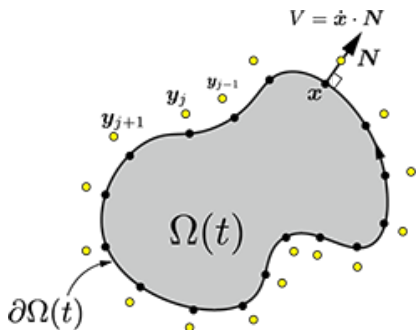
メリット

- コーディングが比較的容易
- MFSでは数値積分が不要。例えばBEMより計算時間が少なく済むことがある
- パラメータ次第で精度が非常に良い

¹M. Katsurada & H. Okamoto, A mathematical study of the charge simulation method. I,

J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **35** (1988), 507–518

²K. Sakakibara, Bidirectional numerical conformal mapping based on the dipole simulation method. Eng. Anal. Bound. Elem. **114** (2020), 45–57 2020.



境界上の黒色の点が選点
黄色の点が特異点

※基本解近似解法は「代用電荷法(Charge Simulation Method)」とも呼ばれる。境界条件で与えられた電位を選点上で満たすように、特異点の位置に置かれた電荷の強さを連立方程式を解くことで求めるイメージ。

例：ポテンシャル問題

$$\begin{cases} \Delta p(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ p(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

に対して、近似解 $P(\mathbf{x})$ を次のように求める：

$$P(\mathbf{x}) = Q_0 + \sum_{j=1}^N Q_j E_j(\mathbf{x})$$

ここで、

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} |\mathbf{x}| \quad (\text{ラプラス方程式の基本解})$$

$$E_j(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x} - \mathbf{y}_j) - E(\mathbf{x} - \mathbf{z}_j)$$

$\{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^N$: 特異点

$\{\mathbf{z}_k\}_{k=1}^N$: ダミ一点

問題点と解決策

特異点の配置の方法が非自明であり、かつMFSがうまく機能するかに影響を及ぼす
→「天野式の特異点配置²」を利用

Hele-Shaw問題

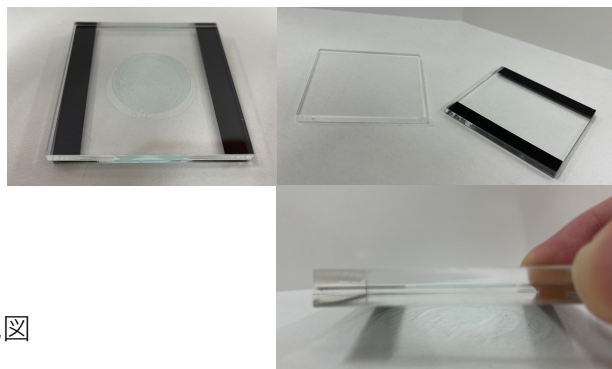
非常に狭い隙間を作り出すように2枚の平行板使った実験装置をHele-Shawセルと呼ぶ。

その名前は、2枚の平行板で作られた非常に狭い隙間の中で粘性流体を用いて流線の可視化ができることを発見したH. S. Hele-Shawに由来する³。

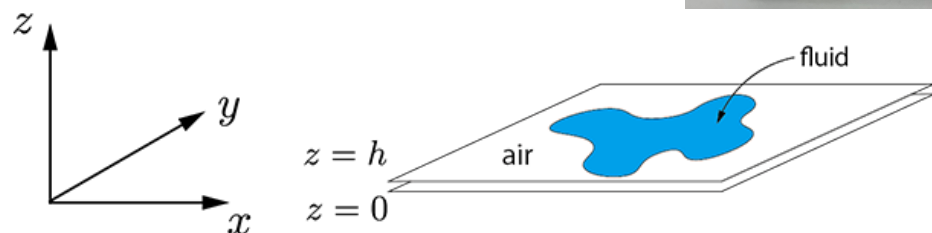
Hele-Shawセル内の流体の動き（Hele-Shaw流）は高さ方向の空間が非常に狭いため、準2次元の問題とみなせる。これをさらに高さ方向の平均を取ったり、適切な近似を施すことにより、完全に2次元の問題として扱うことができる⁴。このように導出された2次元問題をHele-Shaw問題と呼ぶ。

³Henry S. Hele-Shaw. The flow of water, *Nature* 58 (1898), 34–36

(左上)
Hele-Shawで挟んだ液体洗剤
(右上)
2枚のガラス。黒い部分はテープが貼ってあり、スペーサーの役割を果たす。
(右下)
Hele-Shawセルの隙間



(下) Hele-Shawセルの模式図



Hele-Shaw問題への近似の例

⁴B. Gustafsson & A. Vasil'ev, *Conformal and Potential Analysis in Hele-Shaw cells*, Birkhaeuser, 2006

粘性流体に対する3次元Navier-Stokes方程式：

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} \text{ in } \mathbb{R}^3$$

近似に用いる仮定  適用

- Stokes近似（流れは遅く，定常）

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}, (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

- 高さ方向へは動かない

$$w = 0 \quad (\text{速度の第3成分})$$

- 粘着条件（平行板と接している点での速さは0）

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = \varphi(x, y, t)z(z - h), \\ v(x, y, z, t) = \psi(x, y, t)z(z - h). \end{cases}$$

古典的Hele-Shaw問題(CHS)

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & \text{in } \Omega(t), \\ p = \sigma \kappa & \text{on } \partial\Omega(t), \\ V = -\frac{h^2}{12\eta} \nabla p \cdot \mathbf{N} & \text{on } \partial\Omega(t). \end{cases}$$

磁性流体のHele-Shawモデル

$$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$$

3次元の磁性流体の支配方程式⁵

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu_0 M \nabla H + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$$

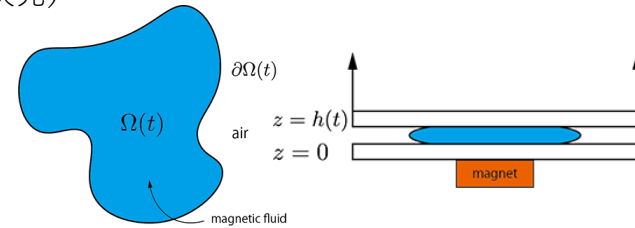
⁵R. E. Rosensweig, *Magnetic Fluids*, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **19** (1987), 437–463

TDG-Hele-Shaw近似

※R. E. Rosensweigは磁性流体のパイオニア的存在で、磁性流体に対する研究の多くは彼の論文を参照している

記号の定義 (3次元)

ρ : 流体密度
 $\mathbf{v}$: 速度
 p : 圧力
 μ_0 : 真空透磁率
 M : 磁化の強さ
 H : 磁場の強さ
 η : 粘性係数
 $\mathbf{g}$: 重力加速度



TDG-MHSの図

TDGのイメージ

古典的Hele-Shaw問題ではセルの間隔は一定であったが、セルの間隔を時間に依存させるTime-dependent gap(TDG)の問題も知られている。

磁性流体Hele-Shawモデル⁶ (TDG-MHS)

$$\begin{cases} \Delta p(\mathbf{x}, t) = 12\eta \frac{\dot{h}(t)}{h(t)^3} + \frac{2M}{h(t)} \Delta \varphi_m(\mathbf{x}, t) \\ p(\mathbf{x}, t) = \sigma \kappa \\ V(\mathbf{x}, t) = -\frac{h(t)^2}{12\eta} \nabla p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) + \frac{h(t)M}{6\eta} \nabla \varphi_m(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \\ \varphi_m(\mathbf{x}, t) = -M \int_{\Omega(t)} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 + h(t)^2}} \right) dS' \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{in } \Omega(t) \subset \mathbb{R}^2, \\ \text{on } \partial\Omega(t), \\ \text{on } \partial\Omega(t) \end{array}$$

TDG-MFSモデル内の記号の定義

p : 圧力
 M : 磁化の強さ
 κ : 曲率
 σ : 表面張力係数
 η : 粘性係数
 $h(t)$: Hele-Shawセルの間隔
 $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$: 単位法線ベクトル

$$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)^T$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$$

⁶A. Tatulchenkov & A. Cebers, *Magnetic fluid labyrinthine instability in Hele-Shaw cell with time dependent gap*, *Phys. Fluids* **20** (2008)

数値計算結果

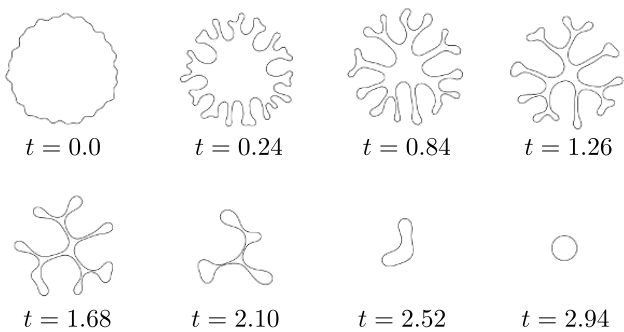
スキーム概要

- MFSを用いて離散曲線の各頂点における法線速度を求める
- 漸近的一様配置法⁷により、選点は境界上にほぼ一様に配置
- 積分項 $\varphi_m(\mathbf{x}, t)$ の計算にはモンテカルロ法を使用
- 構造保存を実現するように、第 $N + 1$ 式として(CP)を与えた

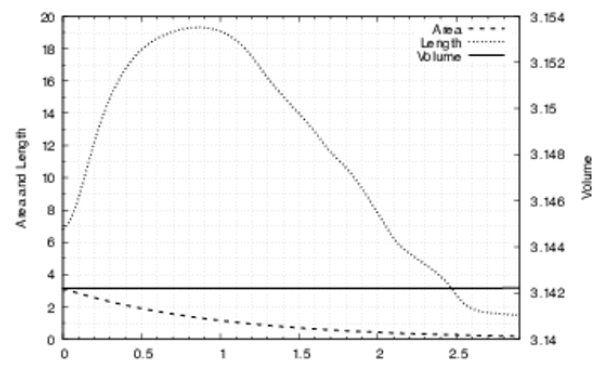
(CP)
$$\sum_{j=1}^N Q_j H_j = 0, H_j = \sum_{i=1}^N \nabla E_j(\mathbf{x}_i^*) \cdot \mathbf{n}_i r_i$$

$N = 300$: 頂点の数
 $\Delta t = 1/(10N^2)$: 時間刻み
 $r_a = 1$: 天野式特異点配置のパラメータ
 $R_0 = 1$: 初期曲線の基準半径
 $h_r = h_0/R_0 = 0.25$: モデル内の無次元パラメータ
 $M = 1000$: モンテカルロ法のサンプル点数
 $Bmv = (\pi h_0/R_0)^{1/3} Bm$: 磁場をコントロールするパラメータ
 $h_*(t) = \exp(t)$: TDGに用いる高さの例

数値計算結果 (時間発展の様子)



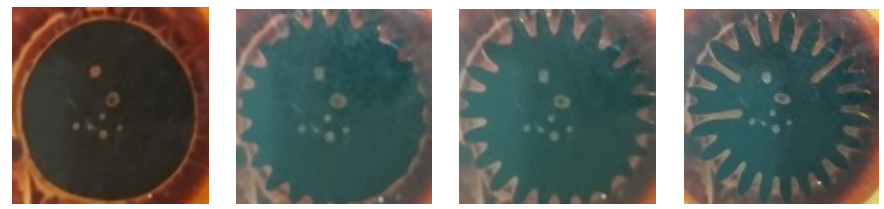
Bmv = 35, Ca = 50 の場合の結果 [\[SSY\]](#)



面積, 周長, 体積の時間変化。
体積が保存されていることがわかる。

⁷矢崎成俊, 『動く曲線の数値計算』, 共立出版, 2019 など

※数値計算結果は、前スライドのモデルを無次元化したものに対する結果である (パラメータは左下)



磁性流体Hele-Shawの実験 (講演者による)



A. Tatulchenkov and A. Cebers (2008)⁵の結果

