

# 量子群の Laplace 作用素を用いた量子 Riemann 空間の調和解析

九州大学数理学府 M2 嶋田将史 (発表者兼著者)

- ▶ 指導教員：九州大学 IMI 落合啓之教授.
- ▶ 専門：調和解析, Riemann 幾何学, 表現論.

## 動機

非可換幾何学で一つの大きなクラスを構成する“量子群  $\mathcal{A}$ ”は, Fig1 で特徴付けられる Hopf 代数に幾つかの構造を付加したモデルとされている. 数学では Lie 群と Lie 代数とそれらの表現論,  $q$ -解析, 結び目理論や組合せ理論と, 物理では摂動理論, 可積分系, 量子重力 (quantum gravity) と交わって理論が深化した. 量子群で扱う概念の多くは, classical limit と呼ばれる極限操作 ( $q$  の特殊値) を取ることによって, 量子化を施す前の構造が復元される.

この研究のモチベーションは, 熱方程式の量子化 ( $q$ -差分化) に焦点を絞り,  $q$ -Casimir 作用素を対象とする量子群の調和解析を  $q$ -Laplace 作用素に取り替えたときに量子群の諸分野がどのように現れるかを記述することにある. 特に, Fock-Goncharov が提唱した量子 cluster 代数の modular 関手予想との関連を得たい.

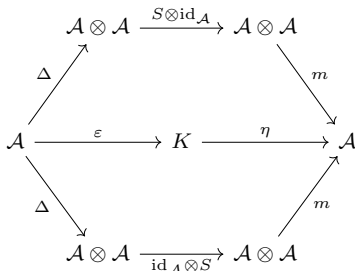


Fig1:  $K$  は体とする. 積  $m$  と単位射  $\varepsilon$  の他に,  $\Delta$  は余積,  $\eta$  は余単位,  $S$  は対合射と呼ばれる  $K$ -代数準同型. 主にここで扱うのは,  $K = \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{C}[SL_q(2, \mathbb{R})], \mathbb{C}[SL_q(2, \mathbb{C})], U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ . ただし,  $q \in \mathbb{C}^\times$  は形式的パラメータとして一つ固定されているとする.

## Hopf 代数の例 (有限群上の関数環)

単位元  $e$  を持つ有限群  $G$  上の複素数値関数環  $\mathbb{C}[G]$  は, 関数の積  $m : (f, f') \mapsto ff'$  と  $\eta : \mathbb{C} \ni \alpha \mapsto \alpha \in \mathbb{C}[G]$ ,  $\Delta(f)(g, h) := f(gh)$ ,  $\varepsilon(f) := f(e)$ ,  $S(f)(g) := f(g^{-1})$  ( $f, f' \in \mathbb{C}[G]$ ,  $g, h \in G$ ) によって可換な Hopf 代数となる.

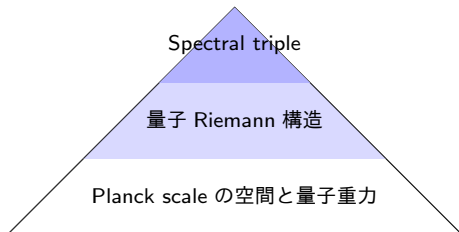
## 目的

対称空間の調和解析を参考に、対称な量子座標環を対象として、量子 Riemann 幾何学のコンテキストで再び  $\nu$ -量子群と量子群の表現を実現することが目的。

より大きな目標は、Woronovicz らの

量子調和解析，量子 cluster 代数，Letzter が整備した量子対称対としての  $\nu$ -量子群， $q$ -差分と  $q$ -特殊関数などの量子群の諸領域が，Fig2 でどのように位置するかを包括的に理解することである。

↓ 非可換微分幾何の方針 (“top down”)



↑ 量子 (離散)Riemann 幾何の方針 (“bottom up”)

Fig2 : 量子 (離散)Riemann 幾何と非可換微分幾何の関係。Classical limit では、ピラミッドの上段から層，Riemann 多様体，マクロなスケールの空間が対応。

## 事実 (量子調和解析と量子 cluster 代数)

$SL_q(2, \mathbb{C})$  の量子 Peter-Weyl の定理

$$\mathbb{C}[SL_q(2, \mathbb{C})] \simeq \bigoplus_{l \in \frac{1}{2}\mathbb{N} \cup \{0\}} V_l \otimes V_l^*$$

は modular 関手予想 の一例である。すなわち，次の同型の存在を一つ与えていると解釈できる：

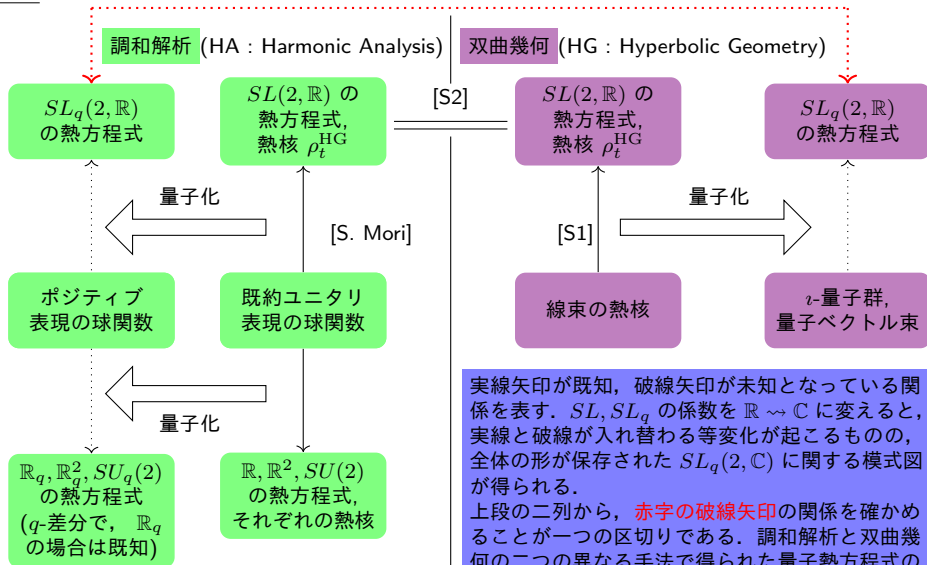
$$V_{G,S;\lambda} \simeq \int V_{G,S';\lambda,\chi,\chi^{-1}} d\mu(\chi).$$

## 非可換微分幾何と量子 Riemann 幾何

非可換微分幾何では，spectral triple の存在を公理として，“微分形式”  $\Omega$ ，“外微分”  $d$  等を与えて作用素環の手法で量子重力を解析する。(Fig2 の “top down”)

量子 Riemann 幾何では，そのアプローチとは反対に，Riemann 幾何で spectral triple を構成する流れを汲む。Riemann 構造の量子化から理論を構築，spectral triple を得る。(Fig2 の “bottom up”)

# 方法



実線矢印が既知, 破線矢印が未知となっている関係を表す.  $SL, SL_q$  の係数を  $\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{C}$  に変えると, 実線と破線が入れ替わる等変化が起こるものの, 全体の形が保存された  $SL_q(2, \mathbb{C})$  に関する模式図が得られる.

上段の二列から, 赤字の破線矢印の関係を確かめることが一つの区切りである. 調和解析と双曲幾何の二つの異なる手法で得られた量子熱方程式の基本解の二つの表示が  $q$ -解析などを通して等式であることを示す.

[S. Mori] S.Mori, *The heat kernel on  $SL(2, \mathbb{R})$* , [arXiv:1909.03670](https://arxiv.org/abs/1909.03670)

[S1] M. Shimada, *Weighted hyperbolic Laplacian approach for heat kernel on  $SL(2, \mathbb{R})$*  (in progress)

[S2] M.S., *Generalized integral formulae of the Legendre functions of first kind and some applications to harmonic analysis on hyperbolic spaces* (in progress)

結果 ( $\rho_t^{\text{HA}} = \rho_t^{\text{HG}}$ )

$G := SL(2, \mathbb{R}), K := SO(2, \mathbb{R})$  とおく. このとき,

特殊関数の二種類の表示によって,

$$\int_{\hat{G}(\tau_n)} e^{t\lambda_{\tau_n}^U} \Phi_{\tau_n}^U(g^{-1}) d\mu(U) = e^{-(\frac{n}{2})^2 t - i\frac{n}{2}\theta(g)} \rho_{t,n}(x(g) + y(g)i)$$

$$\rho_t^{\text{HA}}(g) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\hat{G}(\tau_n)} e^{t\lambda_{\tau_n}^U} \Phi_{\tau_n}^U(g^{-1}) d\mu(U).$$

- ▶  $\tau_n : K \rightarrow \mathbb{C}^\times, K$  の指標,  $z \mapsto z^n$  に対応.
- ▶  $\hat{G}(\tau_n) : \tau_n$  との重複度が 0 ではない  $G$  の既約ユニタリ表現の集合.
- ▶  $\Phi_{\tau_n}^U : U \in \hat{G}(\tau_n)$  から定まる球関数.
- ▶  $\lambda_{\tau_n}^U < 0 : \Phi_{\tau_n}^U$  の固有値 (of Laplacian).

$$\rho_t^{\text{HG}}(g) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(\frac{n}{2})^2 t - i\frac{n}{2}\theta(g)} \rho_{t,n}(x(g) + y(g)i).$$

- ▶  $x(g) \in \mathbb{R}, y(g) > 0, e^{i\theta(g)} \in \mathbb{C}^\times$  は  $g \in G$  に対して一意 (岩澤分解).
- ▶  $\rho_{t,n} : \text{重み } n/2 \text{ の weighted Maass Laplacian の熱核.}$

$n = 0$  の例 (Poincaré 上半平面  $\mathbb{H}^2 (\simeq G/K)$  上の熱核)

$\mathbb{H}^2$  の熱核は非 Euclid 空間での代表例としてよく知られている. これは上の結果の  $n = 0$  と対応する:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(\frac{1}{4} + \nu^2)t} P_{i\nu - \frac{1}{2}}(\cosh r) \nu \tanh(\pi\nu) d\nu =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{(4\pi t)^{3/2}} \int_r^\infty e^{-\frac{t}{4}} \frac{\xi e^{-\frac{\xi^2}{4t}}}{\sqrt{\cosh \xi - \cosh r}} d\xi.$$

## 考察

- $\rho_{t,n}$  の評価は Helgason-Fourier 変換 で解釈可能,  
 $\rho_t^{\text{HA}}$  の表示を  $\rho_t^{\text{HG}}$  で簡略化した, etc.
- 第 1 種 Legendre 関数  $P_\lambda$  が核の Fourier 変換,  
重み 0 の weighted Maass Laplacian の熱核の表示  
という新しい視点を  $\mathbb{H}^2$  の熱核に与える.
- 数理物理の方面では, 量子 Laplace 作用素の一つと  
みなせる Harper 作用素  $H_\phi$  (磁束  $\phi \in \mathbb{R}$ ) に応用さ  
れると期待する. Fig3 で図示される  $2id - H_\phi/2$   
のスペクトル等を本研究で得られた道具で調べる.

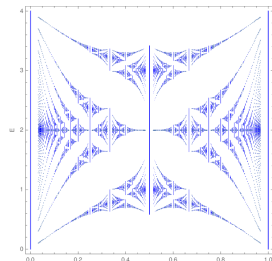


Fig3 : Hofstadter Butterfly, 縦軸は 1 粒子あたりのエネルギー (=スペクトルの範囲) (出典 : Z. Duan, J. Gu, Y. Hatsuda, T. Sulejmanpasic, *Instantons in the Hofstadter butterfly: difference equation, resurgence and quantum mirror curves*, Journal of High Energy Physics (2019) [link](#))

## 要約

- $SL(2, \mathbb{R})$  の熱核は, 調和解析と双曲幾何の二つの方法で表示される.
- $SL_q(2, \mathbb{R})$  の熱方程式を考えるにあたり, 量子 Riemann 幾何の枠組みで量子調和解析,  
 $q$ -量子群, 量子 cluster 代数,  $q$ -差分方程式と  $q$ -特殊関数が関与する.
- 量子 Riemann 空間の調和解析は Harper 作用素に適用できると予想する.

## 参考文献

- E. J. Beggs, S. Majid, *Quantum Riemannian geometry*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 355, Springer, Cham, 2020.
- V. Fock, A. Goncharov, *The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties*, Invent. Math. **175** (2009), 223-286.
- D. Levi, J. Negro and M. A. del Olmo, *Discrete  $q$ -derivatives and Symmetries of  $q$ -difference Equations*, J. Phys. A: Math. Gen., **37** (2004),