異常拡散方程式の粘性解と超関数解の同値性

著者:儀我 美一(東京大学);三竹 大寿(東京大学);佐藤 翔一(東京大学)

・発表者の自己紹介

氏名:佐藤 翔一
所属:東京大学大学院 数理科学研究科 博士課程2年

※クリックすると、
その説明ページに飛べます。

・研究の動機・大まかな位置づけ

不均質な媒質中での物質の拡散(例:土壌における汚染物質の拡散)は、ブラウン運動に基づいた通常の拡散とは異なる挙動をする。この現象は異常拡散と呼ばれ、非整数階の時間微分を用いた数理モデル化(異常拡散方程式)が昨今注目を集めている。異常拡散方程式の数学解析の為、様々な解概念が導入されてきたが、各々の解概念の関係性は全くの不明であった。本研究では異なる2つの解の同値性を明らかにした。

期待される応用例:土壌等の汚染問題、生体細胞の振る舞い、地震予測、金融市場(株価予測)、etc...

・本スライドで伝えたいこと

・異分野・異業種の方へ
→偏微分方程式に対する数学的アプローチ。新たな解概念を導入する動機やその関係性を調査する意義。
・数学(特にPDE専門)の方へ
→非整数階の時間微分項を持つ拡散方程式に対し、粘性解と超関数解、双方の解に収束するような近似解の構成法を見出すことで、同値性を示した。

・異常拡散とは

通常の拡散：粒子の移動(x)の平均二乗変位は、観測時間(t)に対し比例する。(D：拡散係数(定数))

$$\rightarrow \quad \langle x^2 \rangle = 2Dt$$

異常拡散：平均二乗変位や拡散係数が、観測時間に関してべき乗で変化する。

$$\rightarrow \quad \langle x^2 \rangle \propto t^{\alpha}, D \propto t^{\alpha-1}, (0 < \alpha < 1)$$

このような現象が起こる原因の1つとして、不均質な媒質が物質の拡散を阻害することが挙げられる。
これを時間フラクタル性を伴った現象と捉えることで、以下のような数理モデルが考察された。([MK])

・異常拡散方程式(時間非整数階微分を含む偏微分方程式)

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t^{\alpha} u - \Delta u &= f \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ u &= 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u|_{t=0} &= u_0 \quad \text{in} \quad \overline{\Omega}. \end{cases}$$

$0 < \alpha < 1$，異常拡散の性質を表す定数(∂_t^{α}：時間非整数階微分)　$\Omega \subset \mathbb{R}^d$，拡散を考える領域

$u : \Omega \times (0,T) \rightarrow \mathbb{R}$，汚染物質の濃度を表す関数(未知関数)　$u_0 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$，初期濃度分布(既知関数)

$f : \Omega \times (0,T) \rightarrow \mathbb{R}$，汚染物質の湧き出し等を表す関数(既知関数)

・数学解析におけるアプローチ

・一般的に、現象理解の為には、微分方程式の解の性質を調べることが重要。
・しかし、厳密に解を表示できることは、決して多くはない。(そもそも、各点で方程式を満たすような解が存在しないこともある。)
・よって、必要に応じて解の概念(定義)を緩めて考察すべきである。
・異常拡散方程式に対しても様々な解が定義され、研究が進んできた。
(以下、「粘性解([N])」と「超関数解([Z])」と呼ばれる解概念に注目する)

新たな解を定義する際は
・解が存在するか？
・存在するなら、一意か？
が主に重要となる

当該分野において
主流な解である

・本研究の問

Q. 問題(P)において、粘性解と超関数解にはどんな関係があるのか？

大まかに言えば
関係性を調べる為
の手法は少ない

問の難点:
粘性解と超関数解の各々の理論では、注目している解の性質が大きく異なる。その為、片方の理論で有効な手法が、もう片方の理論には適用しにくいことが多々ある。

研究の意義:
基本的に各々の理論は独立した発展をしている。関係性が明らかになれば技術交流が可能となり、分野全体の発展に繋がることが期待できる。

数学の方向け補足:
粘性解は最大値原理に、超関数解は変分原理に基づいた概念である。解の構成法も、前者はPerronの方法、後者はGalerkin法と、大きく異なる。双方の同値性は(例え、単純なラプラス方程式であっても)自明ではない。

・主定理(同値性)

ある仮定の下で，以下が成立する.

u が(P)の粘性解であるならば、(P)の超関数解でもある。
u が(P)の超関数解であるならば、(P)の粘性解でもある。

ある仮定の下で、全く異なる方法で定義された2つの解概念が同じであることがわかった！

・証明の概略(数学の方向け)

大まかに言えば、構成した近似解が、どちらの理論においても”都合が良い”ことを証明した。

証明の概略：
STEP1. 時間方向を離散化し、レゾルベント型の近似を施す。時間nステップ目は楕円型の境界値問題となる。
→ nステップ目の方程式：$(I - h^{\alpha}\Delta)v = g_{n-1}$，$g_{n-1}$:(n-1)ステップ目までの情報を含む既知関数
STEP2. 各時間毎に解を構成し、時間方向に線形補間したものを元の問題の近似解とする。
STEP3. その近似解が(P)の粘性解、超関数解どちらにも(適切な位相で)収束することを示す。

難点と解決法：
近似解と超関数解の誤差が0に弱収束する証明。(この誤差の強収束は期待できない為、緻密な評価が必要である。)この解決の為に、離散スキームを考慮したカーネル近似を導入した。

・主結果の適用例

・初期データや外力項を連続にすれば、超関数解も連続となる。
・超関数解の減衰評価が、粘性解でも成り立つ。

各々の理論の手法だけでは証明が大変なものが、解決できる！

・数学的補足

①今回考察した異常拡散方程式について

・簡単の為、空間微分演算子は-Δとしたが、より一般の一様楕円型まで拡張可。
・時間非整数階微分の定義(Caputo微分)

$$\partial_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{du}{ds}(s)ds$$

②主定理の仮定(以下3つ)

(A1): $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ は C^2 級で有界な境界を持つ領域.
(A2): $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ かつ $u|_{\partial\Omega} = 0.$
(A3): $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,T])$.

③参考文献

[MK]: R. Metzler, and J. Klafter, (2000) The Random Walks Guide to Anomalous Diffusion A Fractional Dynamics Approach. Physics Reports, 339, 1-77.
[N]: T. Namba, On existence and uniqueness of viscosity solutions for second order fully nonlinear PDEs with Caputo time fractional derivatives, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 25 (2018), no. 3, Art. 23, 39 pp.
[Z]: R. Zacher, Weak solutions of abstract evolutionary integro-differential equations in Hilbert spaces, Funkcial. Ekvac. 52 (2009), no. 1, 1--18.