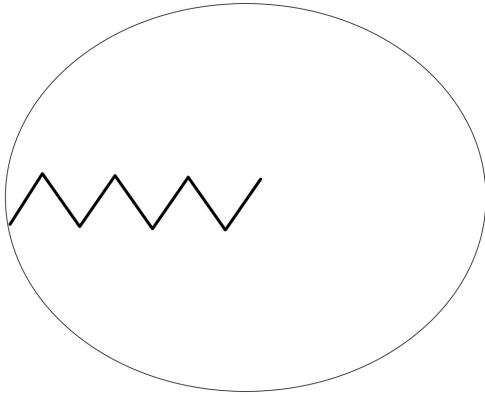


# 脆性材料の亀裂現象を記述するフェーズフィールド方程式の解析

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士1年 佐藤光汰朗

発表者 佐藤光汰朗 (東北大学大学院 理学研究科数学専攻 博士1年)



## 興味を持っている対象

物理的背景を持つ変分問題, 特に破壊現象のように対象の **特異性** が重要な役割を担う特異変分問題に興味がある.

変分問題とは, エネルギー等の汎関数に対する最小化問題である.  
(例: フェルマーの原理, 極小曲面論 etc.) 発表者は変分問題を解析学, 特に **偏微分方程式論** を通して理解したい.

## 研究の動機

亀裂集合に対する  
エネルギー最小化  
問題

⇒

変位の**不連続性**  
を招き、  
解析が困難に

⇒

亀裂集合を  
連続パラメータ  
= **phase field**  
で近似

## 研究の目的

特異性を含む変分問題に **フェーズフィールド** と呼ばれる連続的パラメータを導入することで, 破壊現象固有の特徴を残しながら特異性を緩和したPDEモデルを導出し, 数学的な基礎理論を整備する.

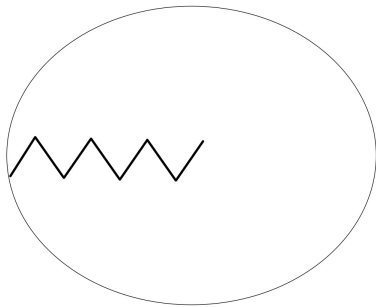
キーワード 亀裂現象, フェーズフィールドモデル, Ambrosio-Tortorelli 正則化, 変分法, 変分不等式, 非線形偏微分方程式

## §1 背景 亀裂を数学的にどのようにモデル化するか

### フェーズフィールドとは？

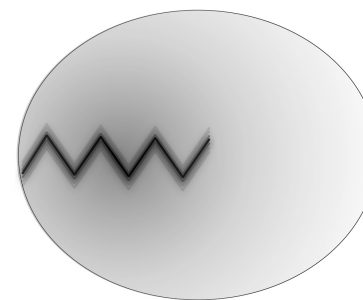
0と1の間の値で 材料の損傷状態を表す関数  $z : \Omega \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$

従来モデル



亀裂  $\Gamma$   
= 2次元 (or 1次元) 図形

PF モデル



亀裂  $\Gamma = (z \text{ の零点})$

$\begin{cases} z \approx 1 \cdots \text{損傷なし} \\ z \approx 0 \cdots \text{亀裂} \end{cases}$

$z = 0$    $z = 1$

亀裂自体は不連続でも、フェーズフィールドは連続な関数になりうる  
 $\Rightarrow$  対象の特異性の緩和  $\Rightarrow$  破壊問題の解析が容易に！

### 自然な疑問

フェーズフィールド  $z$  が満たす 関数方程式 は？

## § 2 主定理の内容 ... フェーズフィールドの満たす方程式の導出とその可解性

### フェーズフィールド方程式

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t z \leq 0, -\Delta z + \sigma z \leq f, \\ \partial_t z (-\Delta z + \sigma z - f) = 0. \end{cases}$$

未知関数:  $z = z(x, t)$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  
 $0 < t < T$ ,  $\sigma \geq 0$  (定数)

初期条件:  $z(x, 0) = z_0(x)$ ,

境界条件:  $\partial_\nu z = 0$  (Neumann B.C.).

### 仮定

(仮定 0)  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0, T; (H^1(\Omega))^*)$ ,  $z_0 \in H_N^2(\Omega)$   
 $:= \{v \in H^2(\Omega) \mid \partial_\nu v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$

(仮定 1)  $\exists \tilde{f} \in L^2(\Omega)$  s.t.  $f(\cdot, t) \geq \tilde{f}$  in  $\Omega \times (0, T)$ ,

(仮定 2)  $-\Delta z_0 + \sigma z_0 - f(\cdot, 0) \leq 0$  in  $(H^1(\Omega))^*$

### 方程式の可解性

初期条件  $z_0$  と外力場 (ひずみ場)  $f$  に対する制約条件のもとで、方程式 (P) はただ一つの解を持つ。



### 定理 ((P) の適切性, 解の準静的発展)

上記の仮定のもとで,  $z_0$  を初期値とする問題 (P) の解  $z \in W^{1,2}(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_N^2(\Omega))$  が一意的に存在する. さらに, エネルギー汎関数を

$$\mathcal{E}(w, t) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |w|^2 + \frac{\sigma}{2} |\nabla w|^2 - f(\cdot, t) w \right) dx \text{ for } w \in H^1(\Omega)$$

と定めると, 解  $z$  は次の 3 つの条件を満たす.

- ▶ (不可逆性)  $\partial_t z \leq 0$  a.e. in  $\Omega \times (0, T)$ .
- ▶ (片側平衡条件)  $\mathcal{E}(z(t), t) \leq \mathcal{E}(w, t)$  for  $w \leq z(t)$ .
- ▶ (エネルギー保存則)  $\mathcal{E}(z(t), t) = \mathcal{E}(z_0, 0) - \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t f(s) z(s) dx ds$ .

### 亀裂の準静的発展性

解  $z$  は, 破壊モデルにおいて自然に要求される 3 つの条件を満たしている。



亀裂発生 の 予測へ

## § 3 既存のモデルとの比較, 今後の展望

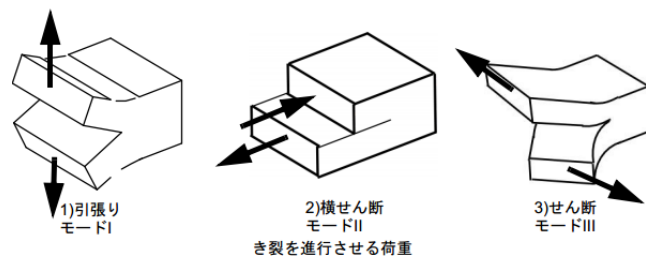
### ① 関数の特異性 (非有界性) の定量的評価が可能に

非有界作用素が含まれるセッティングも扱えるよう方程式の枠組みを拡張

### ② 破壊現象の数値解析の理論的基礎を与える

準静的発展モデルを考えているため, 既存の手法と比較して精度向上が見込まれる

(cf. [T. Takaishi, M. Kimura, Kybernetika (Prague), 2009])



(画像は <https://frone.jp> より引用)

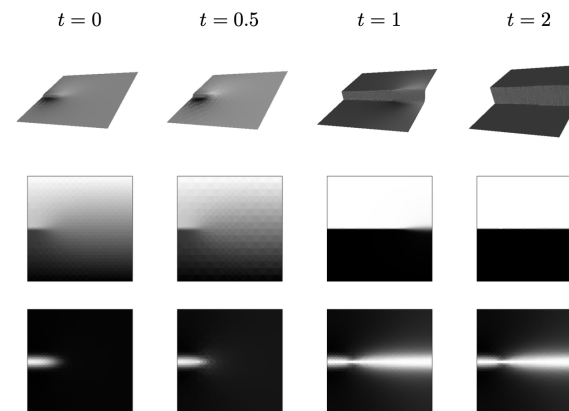


Fig. 1. Birdviews of  $u$ (top),  $u$  (middle) and  $z$  (bottom).

(画像は [Takaishi-Kimura] より引用)

## § 4 モデルの導出と解析の難しいポイント ～エネルギーの最小化問題から偏微分方程式へ～

### ▶ フェーズフィールドエネルギー $E_\varepsilon(u, z)$ の最小化

$$\text{Minimize } E_\varepsilon(u, z) = \underbrace{\int_{\Omega} (z^2 + \varepsilon^2) |\nabla u|^2 dx}_{\text{ひずみエネルギー}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - z)^2 dx}_{\text{表面エネルギー}}$$

$$\xrightarrow{\text{“Euler-Lagrange eq.”}} \boxed{\frac{d}{d\delta} E_\varepsilon(u, (1 - \delta)z + \delta w) \Big|_{\delta=0} \geq 0} \quad \text{for all } w \leq z \text{ in } \Omega$$

### ▶ 変分不等式と同値な方程式

$$\begin{cases} \partial_t z \leq 0, -\Delta z + \sigma z \leq f & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t z (-\Delta z + \sigma z - f) = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \end{cases} \iff \partial I_{(-\infty, 0]}(\partial_t z) - \Delta z + \sigma z - f \ni 0 \text{ in } \Omega \times (0, T)$$

$\partial I_{(-\infty, 0]}$  の退化性により  $\partial_t z$  に関する情報が得られない

→  $f$  の時間微分に十分な正則性を仮定し 関数の特異性を定量的に評価する

