距離空間の迂回を持たないブロック分割について (arXiv:2110.11696)

笹谷 晃平

異分野・異業種研究交流会
2021年11月13日

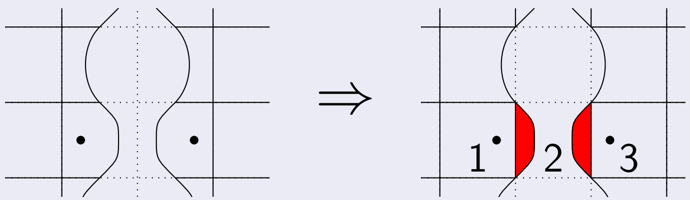
発表者紹介

- 京都大学(RIMS) 博士課程2年
  学振特別研究員(DC1)
- 専攻: 確率論
  (指導教官: 熊谷隆教授)
- 主な興味: フラクタルをはじめとする，複雑な距離空間上の解析・確率課程や関連する幾何

本研究はJSPS科研費(JP20J23120)の助成を受けたものである

本研究の動機及び位置付け

ユークリッド空間$\mathbb{R}^d$は一辺の長さが2^{-k}の大きさのd次元格子($k \in \mathbb{Z}$)によって次々と分割でき，この分割はいくつもの良い性質を持つ．本研究はこのような分割を一般の距離空間に拡張するものであり，特に任意の2点が適切なスケールの立方体の短いチェインで結ばれるという性質に注目し，完備，doubling，一様完全の場合に先行研究を拡張した．
フラクタルのような図形を念頭において，　このような分割を仮定する幾何・ポテンシャル論における先行研究があり，本研究の動機となっている．



背景・先行研究

$\mathbb{R}^d$ の標準的な 2 進立方体分割

$\mathcal{S}_k :=$

$$\Big\{\prod_{i=1}^{d}\Big[\frac{a_i}{2^k}, \frac{a_i+1}{2^k}\Big] \mid a_i \in \mathbb{Z}\ (1 \le i \le d)\Big\}$$

$(k \in \mathbb{Z})$ は以下の性質を持つ:

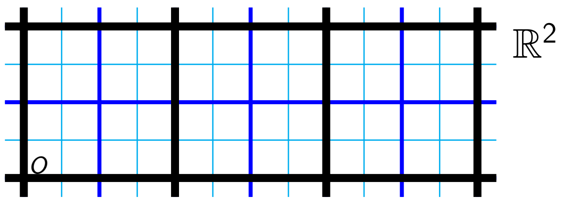
(S1) （k 毎に, ）$\mathbb{R}^d$ を過不足なく分割（内部が互いに交わらない）

(S2) 各立方体はそれぞれ, ただ１つの $\mathcal{S}_{k-1}$ に含まれる立方体の部分集合

(S3) 各立方体は半径 $2^{-(k+1)}$ の球を内包し, 半径 2^{-k} の球に含まれる

(S4) 距離が 2^{-k} 未満の 2 点を含む立方体は隣接している

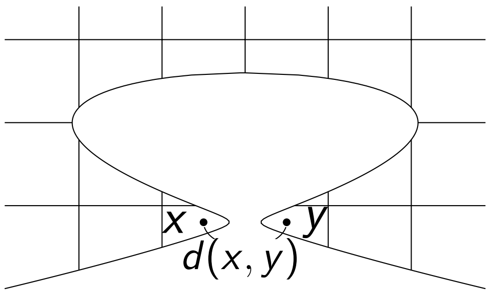
$\rightsquigarrow$ 一般の距離空間 (X, d) において対応するものは存在するか？



David ('88, '91), Christ ('90), Hytönen-Kairema ('12), etc.
:(S1)〜(S3) の性質に注目して対応物を構成

距離空間に "入り江" のような構造があると, (S1)〜(S3) を満たす空間の分割でも, (S4) を満たすとは限らない（右図）

$\rightsquigarrow$ 先行研究の手法を改良し, (S4) も満たすような構成法を構築



(X, d) の仮定

完備 :$x_n \in X, d(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \Rightarrow \exists x \in X, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

doubling :$\exists N, \forall x \in X, r > 0, \exists\{x_i\}_{i=1}^N, B(x, 2r) \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r)$

一様完全 :$\exists \gamma > 1, \forall x \in X, r > 0,$
$B(x, r) \neq X$ ならば $B(x, \gamma r) \setminus B(x, r) \neq \emptyset$

Remark. 先行研究では doubling 条件のみ仮定 (追加の条件は, 後述の応用を念頭に置いたもの)

主結果・応用例

Theorem 1 (S. '21)

$0 < c_* < C_* < \infty$ なる定数 c_*, C_* を固定したとき，
$\exists C_1, C_2, C_3, r_0 > 0$ があって次の条件を満たす：点集合
$\{x_{k,n} \mid k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ n < \exists N_k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$ が
$\exists r \in (0, r_0]$ に対し条件

$$d(x_{k,n}, x_{k,m}) \geq c_* r^k \quad (\forall k, n, m, n \neq m) \qquad (H1)$$

$$\min_{n<N_k} d(y, x_{k,n}) < C_* r^k \quad (\forall y \in X) \qquad (H2)$$

を満たすなら，以下の条件を満たす
$Q_{k,n} = Q(x_{k,n}) \subset X$ が存在する：

- $\bigcup_{n<N_k} Q_{k,n} = X \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$ (D1)
- $\mathrm{int}\, Q_{k,n} = \mathrm{int}(\overline{Q_{k,n}}), \quad \overline{\mathrm{int}\, Q_{k,n}} = \overline{Q_{k,n}}$ (D1')
- $l \geq k \Rightarrow Q_{l,m} \subset Q_{k,n}$ または $Q_{l,m} \cap Q_{k,n} = \emptyset$
  $(\forall n < N_k,\ m < N_l)$, (D2)
- $B(x_{k,n}, C_1 r^k) \subset Q_{k,n} \subset B(x_{k,n}, C_2 r^k)$, (D3)
- $d(y, z) \leq C_3 r^k \Rightarrow \exists n_1, n_2, m$ s.t. $y \in \overline{Q_{k,n_1}}$,
  $z \in \overline{Q_{k,n_2}}$, $\overline{Q_{k,n_i}} \cap \overline{Q_{k,m}} \neq \emptyset\ (i = 1, 2)$ (D4)

Remark.(H1),(H2) を満たす点集合 が存在することは容易にわかる。(D1)〜(D4) が (S1)〜(S4) に対応

[先行研究への応用]:

木上 ('20) (S. '21: 非有界・離散の場合に拡張)

- （仮定）：孤立点を持たない cpt 距離空間において，Theorem 1 の $Q_{k,n}$ に相当する構造，"Basic Framework を満たす分割" が存在
- （結論）：距離空間の幾何的複雑さを測る量の一つである Ahlfors 正則共形次元（以下 ARC 次元，詳細な定義は補足に) が，分割の構造から定まるグラフの p 次ポテンシャルの変分問題を用いて特徴づけられる (幾何的・解析的な特性量の結びつけ)

Theorem 2 (S. '21)

孤立点を持たない完備距離空間 (Y, ρ) につき以下の条件は同値

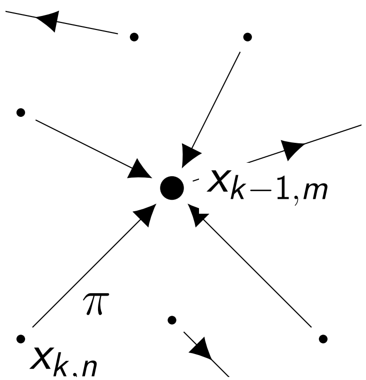
(a) *doubling* かつ一様完全
(b) (Y, ρ) の *ARC* 次元は有限
(c) *"Basic Framework* を満たす分割*"* が存在

(Pf.)(a)⇔(b) は既知 (cf. Heinonen '01)
(c)⇒(b) は木上'20, S.'21, (a)⇒(c) は本研究

証明のアイデア

各 $x_{k,n}$ に対し、親となる
$\pi(x_{k,n}) := x_{k-1,m}$ $(\exists m)$
を選んで対応させ,

$$\overline{Q_{k,n}} = \overline{\bigcup_{i \geq 0} \{x_{l,m} \mid \pi^i(x_{l,m}) = x_{k,n}\}}$$



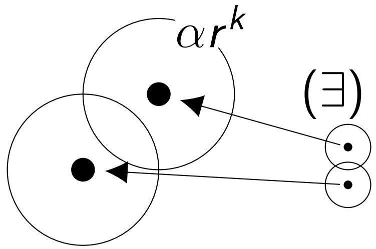
(子孫の点全体の集合の閉包) とおく
$\rightsquigarrow$ $Q_{k,n}$ が求める条件を満たすように π を作る
（先行研究から共通のアイデア）

- 追加で (D4) ((S4) に相当) を満たすには？

条件 1

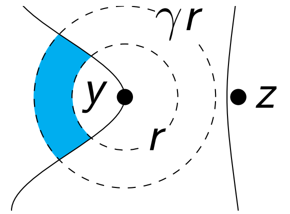
$\exists\alpha, B(x_{k,n_1}, \alpha r^k) \cap B(x_{k,n_2}, \alpha r^k) \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists n'_i$ s.t. $\pi(x_{k+1,n'_i}) = x_{k,n_i}$ $(i = 1, 2)$,
$B(x_{k+1,n'_1}, \alpha r^{k+1}) \cap B(x_{k+1,n'_2}, \alpha r^{k+1}) \neq \emptyset$

$\rightarrow$ 条件 1 と (D3) を繰り返し使うことで, $\overline{Q_{k,n_1}}$, $\overline{Q_{k,n_2}}$ 上に接近する Cauchy 列ができ, 完備性により共有点に収束 $(\because \overline{Q_{k,n_1}} \cap \overline{Q_{k,n_2}} \neq \emptyset)$



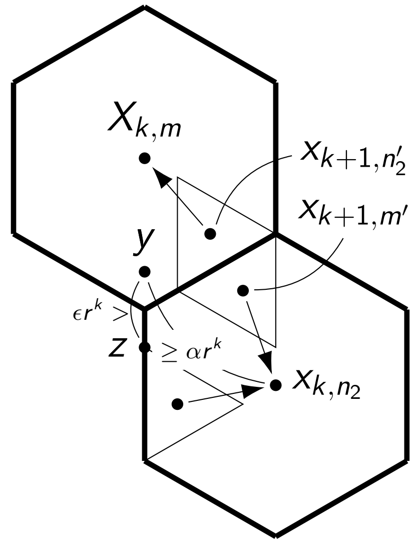
さらに, $\bigcap_{i=1,2} \overline{B(x_{k,n_i}, (C_2 + \epsilon) r^k)} \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists l, B(x_{k,n_i}, \alpha r^k) \cap B(x_l, \alpha r^k) \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$
ならば, $C_3 = \epsilon$ に対して (D4) が示せる

ところが, 一様完全性だけでは
ある点から別の特定の点に
近づく方向に、中間点が
存在することは示せない
(同様に,$\alpha > C_2$ に対し条件 1 を示すことも不可)



$\rightsquigarrow$ $y \in B(x_{k,m}, C_* r^k)$
なる $\underline{x_{k,m}}$ を利用
$(y \in \overline{Q_{k,m}}$ とは限らない$)$

条件 1 に加えて,
$d(y, z) < \epsilon r^k$ かつ
$d(y, x_{k,n_2}) \geq \alpha r^k$
$\Rightarrow \exists n'_i, m'$ $(i = 1, 2)$ s.t.
$\pi(x_{k+1,n'_i}) = x_{k,n_i}$,
$\pi(x_{k+1,m'}) = x_{k,m}$,
$B(x_{k+1,n'_i}, \alpha r^{k+1}) \cap B(x_{k+1,m'}, \alpha r^{k+1}) \neq \emptyset$
を満たすように π をつくり, (D4) を示した
$(d(y, x_{k,n_2}) < \alpha r^k$ の場合は直接条件 1 が使える$)$



補足・参考文献

●Ahlfors 正則共形次元について
擬対称と呼ばれる空間の変形と，Ahlfors 正則性と呼ばれる空間の複雑さを表す量から定まる

擬対称 (Quasisymmetry)

距離空間 (X,d) と (Y,ρ) が擬対称 $((X,d) \underset{\mathrm{QS}}{\sim} (Y,\rho))$
$\Leftrightarrow$ ∃同相写像 $f: X \to Y$, ∃同相写像 $\theta: [0,\infty) \to [0,\infty)$
s.t. $\forall x,y,z \in X (x \neq z)$ に対し次の不等式が成立:

$$\rho(f(x),f(y))/\rho(f(x),f(z)) \leq \theta\big(d(x,y)/d(x,z)\big).$$

(任意の 3 点の距離の比が緩やかに保たれるような変形)

Ahlfors 正則 (Ahlfors regular)

$(\alpha > 0$ につき$)$ 距離空間 (X,d) が α-Ahlfors 正則 (α-AR)
$\Leftrightarrow \exists C > 0$, $\exists (X,d)$ 上の Borel 測度 μ s.t. $\forall x \in X$,
$\forall r \in [\inf_{y:y\neq x} d(x,y), diam(X,d)]$ につき次が成立:

$$C^{-1}r^{\alpha} \leq \mu(B_d(x,r)) \leq Cr^{\alpha}.$$

例:$\mathbb{R}^d$: d-AR, Sierpiński Carpet: $(\log 8/\log 3)$-AR
α-AR かつ孤立点なし $\Rightarrow \alpha = \dim_H(X,d)$ (Hausdorff 次元)

Ahlfors 正則共形次元 (以下,ARC 次元) は，Ahlfors 正則に現れる α が擬対称変形によってどれほど下がるかを表す

Ahlfors 正則共形次元 (Ahlfors regular conformal dimension)

距離空間 (X,d) の ARC 次元を次で定める:

$$\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) = \inf\{\alpha \mid \exists (Y,\rho) : \alpha\text{-AR} \text{ かつ } (X,d) \underset{\mathrm{QS}}{\sim} (Y,\rho)\}.$$

Remark. α を大きくするのは容易 ((X,d) に対し $(X,d^{\beta})(\beta<1)$ を考える)

参考文献 ([3] の参考文献も参照)

[1] T. Hytönen and A. Kairema, Systems of dyadic cubes in a doubling metric space. *Colloq. Math.* **126** (2012), no. 1, 1–33.

[2] J. Kigami, *Geometry and analysis of metric spaces via weighted partitions.* Lecture Notes in Mathematics, 2265. Springer, Cham, 2020.

[3] K. sasaya, *Systems of Dyadic Cubes of Complete, Doubling, Uniformly Perfect Metric Spaces without Detours.* preprint, 2021, arXiv:2110.11696.