

量子ザハロフ系に対する爆発解の存在

異分野・異業種交流会 2021 2021/11/13

発表者：駒田 洸一 (九州大学大学院数理学研究院 学術研究員)
e-mail: k-komada@math.kyushu-u.ac.jp

私は偏微分方程式の研究を専門に行っています。特に、分散性と非線形性を伴う波動現象を記述する方程式群である非線形分散型方程式が研究対象です。私は非線形分散型方程式における分散性と非線形性のバランスと解の時間挙動の関係性やそのメカニズムについて研究しています。

イオン化プラズマ中のラングミュア波の伝播を記述する**量子ザハロフ系**

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - \Delta^2 u = nu \\ \alpha^{-2}\partial_t^2 n - \Delta n + \Delta^2 n = \Delta|u|^2 \end{cases}$$

を考える。量子ザハロフ系は古典的なザハロフ系に量子効果による4階の項が加わった方程式系であり、**4階シュレディンガー方程式と4階波動方程式の連立系**である。

(先行研究) 非線形シュレディンガー方程式(NLS)では、**ビリアル等式**と呼ばれる函数等式を用いることで、爆発解の存在が証明されている。

(本研究) 量子ザハロフ系に対するビリアル等式を導出し、NLSでの手法を応用することで特別な次元の量子ザハロフ系について爆発解の存在を証明する。

量子ザハロフ系

$$(1) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - \Delta^2 u = nu \\ \alpha^{-2} \partial_t^2 n - \Delta n + \Delta^2 n = \Delta |u|^2 \end{cases}$$

- ・ t : 時間変数, x : (d 次元) 空間変数
- ・ $i = \sqrt{-1}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$
- ・ $u(t, x)$: 電場を表す複素数値関数
- ・ $n(t, x)$: イオン密度を表す実数値関数
- ・ $\alpha > 0$: イオンの音速を表す正定数

(1) は $\|u\|_{L^2}$ と次のエネルギーを保存する:

$$\begin{aligned} & E_{QZ}(u, n, \partial_t n) \\ &= \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2}{2} \\ &+ \frac{\|n\|_{L^2}^2 + \|\nabla n\|_{L^2}^2 + \alpha^{-2} \|\nabla^{-1} \partial_t n\|_{L^2}^2}{4} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} n |u|^2 dx \end{aligned}$$

非線形 4 階シュレディンガー方程式

量子ザハロフ系 (1) において, 形式的に $\alpha \rightarrow \infty$ とすると, $n = -(1 - \Delta)^{-1} |u|^2$ となり, 次の非線形 4 階シュレディンガー方程式が得られる.

$$(2) \quad i\partial_t u + \Delta u - \Delta^2 u = -u \langle \nabla \rangle^{-2} |u|^2$$

$$\cdot \langle \nabla \rangle = \sqrt{1 - \Delta}$$

(2) は $\|u\|_{L^2}$ と次のエネルギーを保存する:

$$\begin{aligned} & E_{QS}(u) \\ &= \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2}{2} \\ &- \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 \langle \nabla \rangle^{-2} |u|^2 dx \end{aligned}$$

主結果

定理 1 (量子ザハロフ系 (1) に対する爆発解)

$6 \leq d \leq 9$ とする. 初期値 $(u_0, n_0, n_1) \in H^2(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^d)$ は球対称であり, $E_{QZ}(u_0, n_0, n_1) < 0$ とする. この時, 初期条件 $(u, n, \partial_t n)|_{t=0} = (u_0, n_0, n_1)$ を満たす (1) の解 (u, n) は有限時間で爆発するか, 無限時間で爆発する. すなわち, $T \in (0, \infty]$ を解 (u, n) の最大存在時間とすると,

$$\sup_{0 < t < T} (\|u(t)\|_{H^2} + \|n(t)\|_{H^1} + \|n_t(t)\|_{\dot{H}^{-1}}) = \infty.$$

定理 2 (4 階シュレディンガー方程式 (2) に対する爆発解)

$6 \leq d \leq 9$ とする. 初期値 $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^d)$ は球対称であり, $E_{QS}(u_0) < 0$ とする. この時, 初期条件 $u|_{t=0} = u_0$ を満たす (2) の解 u は有限時間で爆発する. すなわち, $T \in (0, \infty)$ が存在して,

$$\lim_{t \nearrow T} \|u(t)\|_{H^2} = \infty.$$

ビリアル等式

$$J = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha^2 \Delta \\ 0 & 2\alpha^2 \Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad \left(A_j = x \cdot \nabla + \frac{d+j}{2} \right)$$

$\mathbf{u} = (u, n, \partial_t n)$ が (1) の解のとき, $\partial_t \mathbf{u} = JE'_{QZ}(\mathbf{u})$ であり, 次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{J^{-1} \mathbf{u} \cdot \overline{A} \mathbf{u} dx}_{=V(t)} &= 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} J^{-1} \partial_t \mathbf{u} \cdot \overline{A} \mathbf{u} dx = 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} E'_{QZ}(\mathbf{u}) \cdot \overline{A} \mathbf{u} dx \\ &= (d+2)E_{QZ}(\mathbf{u}) - \frac{d-2}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{d-6}{2} \|\Delta u\|_{L^2}^2 \\ &\quad - \frac{d-2}{4} \|n\|_{L^2}^2 - \frac{d-6}{4} \|\nabla n\|_{L^2}^2 - \frac{d+2}{4\alpha^2} \|\ |\nabla|^{-1} \partial_t n \|_{L^2}^2 \\ &=: K_{QZ}(\mathbf{u}) \leq (d+2)E_{QZ}(\mathbf{u}) \quad (d \geq 6 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

この式から $d \geq 6$, $E_{QZ}(\mathbf{u}) < 0$ ならば, $V(t) \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow \infty$) が分かる.

※ A は, $(AJ)^* = J^* A^* = AJ$ となるように定めている.

定理 1 の証明の概略

$X : |x| \leq 2R$ に台を持つ cut-off 作用素,

$$V_R(t) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} J^{-1} \mathbf{u} \cdot \overline{(AX + XA)\mathbf{u}} dx$$

背理法を使う. 解 \mathbf{u} が時間大域的に存在し, かつ有界であると仮定する.

$\Rightarrow (*) \exists M > 0, \forall t \geq 0, |V_R(t)| \leq MR.$
一方で,

$$\partial_t V_R(t) \leq 2K_{QZ}(\mathbf{u}) + \rho_R(t) + o(1)$$

ここで, t に依らずに $o(1) \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) であり,

$$\begin{aligned} \rho_R(t) &\lesssim R^{-2} \int_{R \leq |x| \leq 2R} |\nabla |\nabla|^{-2} n(t)|^2 dx \\ &\quad + R^{-4} \int_{R \leq |x| \leq 2R} \|\nabla|^{-2} n(t)\|^2 dx \end{aligned}$$

ρ_R については, Guo–Nakanishi–Wang (2013) のアイデアを応用して, 方程式の持つ分散性を用いて精密な評価を行う.

$N := n + i(\alpha|\nabla|\langle\nabla\rangle)^{-1}n_t$ とおく. このとき, $n = \operatorname{Re} N$ であり,

$$N(t) = e^{-i\alpha t H} N(0)$$

$$-i\alpha \int_0^t e^{-i\alpha(t-s)H} U |u(s)|^2 ds$$

$$(H = |\nabla|\langle\nabla\rangle, U = |\nabla|\langle\nabla\rangle^{-1})$$

分散評価

$$\|e^{-i\alpha t H} f\|_{\dot{B}_{\infty,2}^0} \leq C |t|^{-\frac{d}{2}} \|U^{\frac{d-2}{2}} f\|_{\dot{B}_{1,2}^0}.$$

を用いることで, $|\nabla|^{-2}$ による低周波での特異性を解消することができ, t に依らずに $\rho_R \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) が得られる.

$d \geq 6$, $E_{QZ}(\mathbf{u}) < 0$ ならば, R を十分大きくとることで, $V_R(t) \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow \infty$) が分かるが, これは $(*)$ に矛盾.