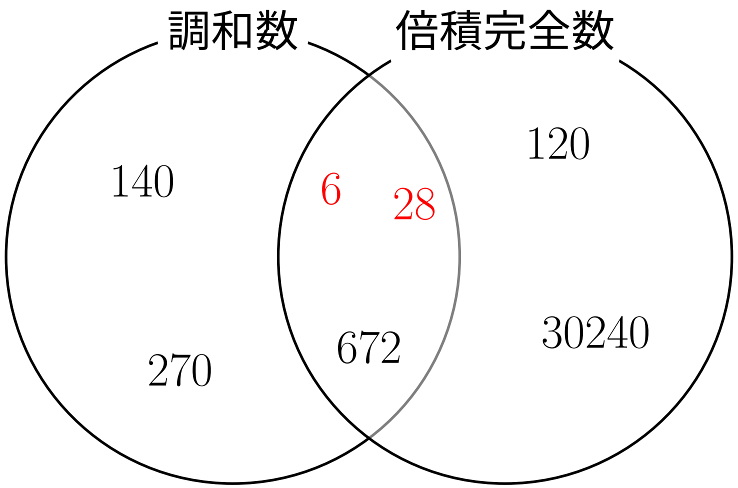
# 円分数の性質と完全数や調和数への応用

東北大学大学院理学研究科数学専攻　修士 2 年　小林数生

完全数とは…自身を除く約数の和が自身に一致する整数　$\boxed{\text{例}: 6 = 1 + 2 + 3}$

調和数と倍積完全数は完全数を含む数

※赤字は完全数




## 興味

- 奇数の完全数，倍積完全数，調和数は存在するか.
- 存在するとしたらどのような数か.

## 研究結果

1. 奇数の調和数は異なる素因数を少なくとも 3 つ持つことを，従来より簡潔な方法で示した.
2. 3 倍完全数は $10^8$ より大きい素因数を持つことを示した.

本紙では 1 の概要を説明する.

# 完全数と調和数

特に断りがない限り，本文中の変数は正の整数であり，また単に整数と言ったら正の整数のことを，約数と言ったら正の約数のことを指すものとする．

## 定義 (完全数)

- 自身を除く約数和が自身に一致
- 約数和が自身の 2 倍
- $\sigma(n) = 2n$

のいずれか (上の 3 つはすべて同じ意味である) を満たす整数を完全数という．ただし $\sigma(n)$ は $n$ の約数和を表す．

## 定義 (調和数)

約数の調和平均 (逆数の算術平均の逆数) が整数になる整数を，(Ore の) 調和数という．例えば 6 が調和数であることは以下のように確かめられる．

$$\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)} = \frac{6\times 4}{6+3+2+1} = \frac{24}{12} = 2$$

同様の計算で，$n$ が調和数であることと，

$$\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)}$$

が整数になることが同値であることがわかる．ただし，$\tau(n)$ は $n$ の約数の個数を表す．

## 解き明かしたいこと

- 奇数の完全数は存在するか否か
- 1 以外の奇数の調和数は存在するか否か

現在見つかっている数は，小さい順に

$$\begin{aligned} \text{完全数} &: 6, 28, 496, 8128, 33550336, \ldots \\ \text{調和数} &: 1, 6, 28, 140, 270, 496, 672, \ldots \end{aligned}$$

と，唯一の奇数の調和数 1 を除けば，それらのすべてが偶数である．

偶数の完全数については，Euclid と Euler によってその形が決定されている．

## 定理

- (Euclid) $2^p-1$ が素数のとき $2^{p-1}(2^p-1)$ は完全数
- (Euler) $n$ が偶数の完全数ならば，$2^p-1$ が素数となるような $p$ が存在して $n=2^{p-1}(2^p-1)$ が成り立つ

左下の調和数の例の中に，6, 28, 496 と完全数が含まれていることがわかる．一般に完全数は調和数である．

## 定理 (O. Ore, 1948)

完全数は調和数である．

**証明．** $n = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ ($p_1,\ldots,p_k$ は互いに異なる素数) を完全数とする．このとき $n$ の調和平均は

$$\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} = \frac{n\tau(n)}{2n} = \frac{\tau(n)}{2}$$

となるから，$\tau(n)$ が偶数であれば $n$ の調和平均は整数となる．
もし各 $e_i$ が偶数であるとすると，

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k}(1+p_i+\cdots+p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^{k}\left(1+\underbrace{p_i(1+p_i)}_{\text{偶数}}(1+p_i^2+\cdots+p_i^{e_i-2})\right)$$

と変形できることから $\sigma(n)$ は奇数であることがわかり，これは $\sigma(n)=2n$ に矛盾する．したがって $e_i$ のいずれかは奇数であるから，

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^{k}(e_i+1)$$

は偶数である．よって $n$ の調和平均は整数となるから，$n$ は調和数である． □

# 研究結果

Ore はまず奇素数のベキが調和数でないことを確かめた．

**定理 (O. Ore, 1948)**

$p$ を奇素数とする．$p^e$ は調和数でない．

また異なる奇素数のベキをかけた数も調和数でないことも以下の定理より得られる．証明は Callan(1992) のものを参照した．

**定理 (C. Pomerance, 1973)**

異なる素因数を 2 つのみ持つ $n$ について，以下は同値である．

1. $n$ は偶数の完全数 (すなわち，$n$ が偶数で $\sigma(n) = 2n$)
2. $n$ は調和数 (すなわち，$n\tau(n)/\sigma(n)$ が整数)

完全数が調和数であることは先に示したので，2 が成り立つときに 1 が成り立つことを示せばこの定理が示される．Callan の証明は初等的な計算によるが，本研究では円分数の素因数の性質を利用し，この定理をより簡潔な方法で証明したので，その概要を紹介する：

証明の概略 (小林). $p, q$ を $p < q$ なる素数，$r, s \geq 1$ とし，$n = p^r q^s$ を調和数と仮定する．$n$ の約数の調和平均は，

$$\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} = \frac{p^r q^s (r+1)(s+1)}{\prod_{\substack{d_1 | (r+1) \\ d_1 \neq 1}} \Phi_{d_1}(p) \prod_{\substack{d_2 | (s+1) \\ d_2 \neq 1}} \Phi_{d_2}(q)} \tag{1}$$

と書ける．まず始めに，$\Phi_{r+1}(p), \Phi_{s+1}(q)$ の少なくとも一方が Zsigmondy 素因数を持たない場合を考える．Bang の定理によれば，そのようなとき $\Phi_{r+1}(p)$ または $\Phi_{s+1}(q)$ のどちらかが，$\Phi_2(2^\alpha - 1)$ または $\Phi_6(2)$ になる．ただし $\alpha$ は $2^\alpha - 1$ が素数となるような素数である．以下では 3 つの場合にわけて，それぞれ $n$ がどのような数であるのか述べる．

1. $(p, r+1)$ または $(q, s+1)$ が $(2^\alpha - 1, 2)$ の場合
2. $(p, r+1)$ または $(q, s+1)$ が $(2, 6)$ の場合
3. $\Phi_{r+1}(p)$ も $\Phi_{s+1}(q)$ も Zsigmondy 素因数を持つ場合．

結論から述べると，1 の場合，$n$ は偶数の完全数であり，2, 3 の場合，そのような $n$ は存在しない．

1. この場合，Garcia の定理より $n$ は偶数である．$p < q$ より $p = 2, q = 2^\alpha - 1, s = 1$ であることがわかる．これを (1) に代入すれば，

$$\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} = \frac{2^{r+1}(2^\alpha - 1)(r+1)}{2^\alpha(2^{r+1} - 1)} \tag{2}$$

となる．(2) は整数であることから

$$(2^{r+1} - 1) \mid (2^\alpha - 1)(r+1) \tag{3}$$

が成り立つが，$2^\alpha - 1$ は素数でかつ $r \geq 1$ に対して $2^{r+1} - 1 > r + 1$ なので $(2^{r+1} - 1) \nmid (r+1)$．したがって $2^\alpha - 1$ は $2^{r+1} - 1$ の素因数である．ゆえに $\alpha \mid (r+1)$ であることがわかる．ここで $\alpha \neq r + 1$ とすると $\alpha \leq \frac{r+1}{2}$ であるから

$$\frac{(2^\alpha - 1)(r+1)}{2^{r+1} - 1} = \frac{r+1}{2^{r+1-\alpha} + \cdots + 2^\alpha + 1} \leq \frac{r+1}{2^{\frac{r+1}{2}} + 1} < 1$$

となって (3) に矛盾する．ゆえに $\alpha = r + 1$ であって，このとき $n = 2^{\alpha-1}(2^\alpha - 1)$ であるから，Euclid の定理より $n$ は完全数である．

2. この場合，$p < q$ より $(p, r+1) = (2, 6)$ である．$2^6 - 1 = 63$ は素数ではないので，Euler の定理より $n$ は偶数の完全数ではなく，したがって $q$ が $2^\alpha - 1$ の形の素数ではないので，Bang の定理より $\Phi_{s+1}(q)$ は Zsigmondy 素因数を持つ．今，(1) は

$$\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} = \frac{2^5 \cdot q^s \cdot 6(s+1)}{63 \cdot \prod_{\substack{d | (s+1) \\ d \neq 1}} \Phi_d(q)} = \frac{2^6 \cdot q^s (s+1)}{21 \cdot \prod_{\substack{d | (s+1) \\ d \neq 1}} \Phi_d(q)}$$

と書き直すことができる．しかし $\Phi_{s+1}(q)$ の Zsigmondy 素因数は $q$ と互いに素で，$s + 1$ より大きいので，$n$ の調和平均は整数にならない．これは矛盾であるから，この場合 $n$ は調和数でない．

# 研究結果 (続き) と参考文献

3. 次の 2 通りに場合分けしてそれぞれ矛盾を導く．

A. $r = s$ の場合

この特殊な場合は Zsigmondy 素因数の性質等を使って矛盾が導かれる．合同式による計算がポイントとなる．

B. $r \neq s$ の場合

この場合は以下の事実を順に確認する．ここからは Zsigmondy 素因数の性質や合同式だけでなく，約数・倍数の関係をうまく利用することで証明ができた．

B-1. $p, q$ がそれぞれ $\Phi_{s+1}(q), \Phi_{r+1}(p)$ の Zsigmondy 素因数であること

B-2. $s + 1$ が素数であること

B-3. $r + 1$ が素数であること

B-4. $\Phi_{r+1}(p) = (r+1)q^e, \Phi_{s+1}(q) = (s+1)p^f$ という形で書けること
　　ただし $e \leq s, f \leq r$ であることに注意する．

最後に (1) に B-4 の式を代入して変形すると，

$$\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} = \frac{p^r q^s (r+1)(s+1)}{\Phi_{r+1}(p)\Phi_{s+1}(q)} = \frac{p^r q^s (r+1)(s+1)}{(r+1)q^e(s+1)p^f} = p^{r-f}q^{s-e}$$

となる．ここで $\Phi_{r+1}(p) = (r+1)q^e$ より

$$p^{r+1} - 1 = (p-1)(r+1)q^e$$

が成り立ち，したがって

$$p \equiv p^{r+1} \equiv 1 \pmod{(r+1)}$$

を得る．今，$(s+1) \mid (p-1)$ であって，$r+1$ と $s+1$ は異なる素数であるから

$$(r+1)(s+1) \mid (p-1).$$

特に

$$(r+1)(s+1) < p$$

が成り立つ．

しかし，

$$\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} < \tau(n) = (r+1)(s+1)$$

より $n$ の調和平均が整数である場合，調和平均が 1 であるが，これは調和平均が 1 より大きくなることに矛盾する．したがって，3 の場合も $n$ は調和数でない． □

## 参考文献


[1] A. Bang, *Taltheoretiske unders$\phi$ gelser*, Tidsskrift Math **5 IV** (1886), 70–80.

[2] D. Callan, *Solution to problem 6616*, Amer. Math. Monthly **99** (1992), 783–789.

[3] L. Euler, *De numeris amicibilibus*, Euler Archive - All Works **798** (1849).

[4] M. Garcia, *On numbers with integral harmonic mean*, Amer. Math. Monthly **61** (1954), 89–96.

[5] O. Ore, *On the average of the divisors of a number*, Amer. Math. Monthly **55** (1948), 615–619.

[6] C. Pomerance, *On a problem of Ore : Harmonic numbers*, unpublished typescript, Notices Amer. Math. Soc. **20** (1973), A-648.

[7] M. Roitman, *On Zsigmondy primes*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** no. 7 (1997), 1913–1919.

[8] L. Washington, *Introduction to Cyclotomic Field, 2nd ed.*, Springer-Verlag, New York, 1997.

# 付録：円分数とその素因数

完全数・調和数の研究において重要な役割を持つ円分数について述べる．

## 定義 (円分多項式, 円分数)

以下で定義する多項式を，円周 $n$ 等分多項式または単に円分多項式という．

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{1\le k\le n \\ \gcd(k,n)=1}} (x-\zeta_n^k)$$

また $x$ に整数を代入したときの $\Phi_n(x)$ を円分数という．ただし，
$\zeta_n = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$ である．

全ての整数 $n$ に対して，円分多項式は整数係数の多項式である．また $n$ が 2 以上のとき，$\Phi_n(0)=1$ であり，したがって $a$ と $\Phi_n(a)$ は互いに素である．
以下の公式によって，約数和と円分数の繋がりが明らかになる．

## 定理 (cf. L. Washington, 1997)

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$$

この公式を用いれば，

$$\sigma(p^e) = \frac{p^{e+1}-1}{p-1} = \frac{\prod_{d|(e+1)}\Phi_d(p)}{\Phi_1(p)} = \prod_{\substack{d|(e+1) \\ d\neq 1}} \Phi_d(p)$$

と表せることがわかる．一般の整数 $n$ について，$n$ が素因数分解
$n = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\dots p_k^{e_k}$ を持つとき，$\sigma(n)$ は各 $p_i^{e_i}$ の約数和の総積になるので，

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k}\sigma(p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{\substack{d|(e_i+1) \\ d\neq 1}} \Phi_d(p_i)$$

と表せる．したがって円分数の素因数について考えることは，与えられた整数の約数和の素因数を考えることと同義である．

次に円分数の素因数について分類をする．

## 定義 (Zsigmondy 素因数)

$a, n \ge 2$ とし，$\Phi_n(a)$ の素因数 $p$ を

- $\mathrm{ord}_p\, a = n$ のとき Zsigmondy 素因数
- $\mathrm{ord}_p\, a \neq n$ のとき非 Zsigmondy 素因数

という．ただし $\mathrm{ord}_p\, a$ は，$a^n \equiv 1 \pmod{p}$ を満たす $n$ のうち最小の整数を表す．

一見特殊にも思える定義であるが，実はほとんどの円分数が Zsigmondy 素因数を持ち，さらに円分数のほとんどの素因数が Zsigmondy 素因数であることが知られている．これらの事実は以下の定理群よりわかることである．次の定理は Zsigmondy が予想し，Bang が証明した．この定理は Zsigmondy らによってより一般の定理に拡張されている．

## 定理 (A. Bang, 1886)

$a, n \ge 2$ とする．以下の場合を除き $\Phi_n(a)$ は Zsigmondy 素因数を持つ．

1. $n = 2, a = 2^e - 1\ (e \ge 2)$
2. $n = 6, a = 2$

Zsigmondy 素因数についてより理解するためには以下の定理が役立つ．

## 定理 (L. Washington, 1997)

$p$ を素数，$n \ge 2$ とし，$p \nmid n$ であるとする．このとき

1. $a \ge 2$ に対し，$p \mid \Phi_n(a)$ であることと，$\mathrm{ord}_p\, a = n$ であることは同値
2. ある $a \ge 2$ に対して $p \mid \Phi_n(a)$ となることと，$p \equiv 1 \pmod{n}$ が成り立つことは同値

また 2 より，特に $p$ が $\Phi_n(a)$ の Zsigmondy 素因数であれば $p > n$.

一方，非 Zsigmondy 素因数については以下の定理によってその性質がわかる．

## 定理 (M. Roitman, 1997)

$a, n \ge 2$ とし，$p$ を $\Phi_n(a)$ の素因数とする．このとき $p$ が非 Zsigmondy 素因数であることと $p \mid n$ であることは同値である．加えて，この場合 $p$ は $n$ の最大の素因数で，さらに $p = n = 2$ でなければ $p^2 \nmid \Phi_n(a)$ である．