発表題目

3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対する ground state energy の漸近展開

自己紹介

長田祐輝 (おさだゆうき)
学部 : 芝浦工業大学
東京都立大学 理学研究科 博士 2 年
研究分野 : 偏微分方程式・変分法
さらに細かい研究分野 : 非線形シュレディンガー方程式

$$\begin{cases} -\Delta u_i + V_i(x)u_i - f_i(u_i) = g_i(\mathbf{u}), \\ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_M), \\ x \in \mathbb{R}^N,\ i = 1, \dots, M. \end{cases} \tag{1}$$

動機

$M = 3$, $f_i(u_i) = |u_i|^{p-1}u_i$, $g_1(\mathbf{u}) = \gamma u_2 u_3$, $g_2(\mathbf{u}) = \gamma u_1 u_3$, $g_3(\mathbf{u}) = \gamma u_1 u_2$ のとき, Pomponio [2] は γ が十分大きいときに (1) の ground state が vector になることを示した. しかし γ が十分小さいときに ground state がどうなるのかについては明らかではなかった.

$M = 1$, $V_1 \equiv \omega$, $f_1(u_1) = |u_1|^{p-1}u_1$, $g_1 \equiv 0$ のとき Cazenave–Lions [1] (1982) により, (1) の解の存在および安定性が示された.

[1] Cazenave–Lions, Comm. Math. Phys., **85** (1982), 549–561.
[2] A. Pomponio, *J. Math. Phys.*, **51**, 093513 (2010).

本研究は倉田和浩氏 (東京都立大学) との共同研究に基づく.

先行研究

Pomponio [2] (2010) では以下のシステムに対して, γ が十分大きいとき, ground state が vector になることを示した.

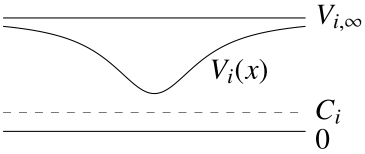
$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x)u_1 - |u_1|^{p-1}u_1 = {\color{red}\gamma} u_2u_3, \\ -\Delta u_2 + V_2(x)u_2 - |u_2|^{p-1}u_2 = {\color{red}\gamma} u_1u_3, \\ -\Delta u_3 + V_3(x)u_3 - |u_3|^{p-1}u_3 = {\color{red}\gamma} u_1u_2. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\gamma$}$$

ここで, u_1, u_2, u_3 は実数値関数であり, $N \leq 5$, $2 \leq p < 2^* - 1$, $\gamma > 0$ であり, さらにポテンシャル $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ は次の条件をみたすと仮定する.

[2] A. Pomponio, *J. Math. Phys.*, **51**, 093513 (2010).

(V1) 任意の $i = 1, 2, 3$ に対して, $V_i \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ かつ, ある正定数 C_i が存在して $V_i(x) \geq C_i$ a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ が成り立つ.

(V2) $V_i(x) \leq \lim_{|y|\to\infty} V_i(y) = V_{i,\infty} \in \mathbb{R}$ a.e. $x \in \mathbb{R}^N$.



$$2^* = \begin{cases} \infty & (N = 1, 2), \\ 2N/(N-2) & (N \geq 3). \end{cases}$$

$\mathbb{H} = H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ とおく. $(\mathcal{P}_\gamma)$ の解は汎関数 $I_\gamma : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ の臨界点として特徴付けられる:

$$I_\gamma(\mathbf{u}) := \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}(|\nabla u_i|^2 + V_i(x)u_i^2) - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_i|^{p+1} - \gamma \int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 u_3.$$

ground state

$\overline{\mathbf{u}}$ は $(\mathcal{P}_\gamma)$ の ground state $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\overline{\mathbf{u}}$ は $(\mathcal{P}_\gamma)$ の非自明解かつ, 任意の $(\mathcal{P}_\gamma)$ の非自明解 $\mathbf{u}$ に対して, $I_\gamma(\overline{\mathbf{u}}) \le I_\gamma(\mathbf{u})$.

$c_\gamma := I_\gamma(\mathbf{u}_\gamma)$ とおく. ここで, $\mathbf{u}_\gamma$ は $(\mathcal{P}_\gamma)$ の ground state.

詳細な漸近挙動を述べるために次の極限問題を考える:

$$\begin{cases} -\Delta w_1 + V_1(x)w_1 = w_2 w_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta w_2 + V_2(x)w_2 = w_1 w_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta w_3 + V_3(x)w_3 = w_1 w_2 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\tilde{\mathcal{P}}_\infty$}$$

$(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の解は汎関数 $\tilde{I}_\infty : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ の臨界点として特徴づけられる:

$$\tilde{I}_\infty(\mathbf{w}) := \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}(|\nabla w_i|^2 + V_i(x)w_i^2) - \int_{\mathbb{R}^N} w_1 w_2 w_3.$$

$\mathbf{w}$ を $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の ground state とし, $\tilde{c}_\infty := \tilde{I}_\infty(\mathbf{w})$ とおく.

主結果 1

主結果 1 (Kurata-O. (2021) [3])

$\gamma \to \infty$ のとき

$$c_\gamma = \tilde{c}_\infty/\gamma^2 + o(1/\gamma^2).$$

さらに $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ を $\gamma_n \to \infty$ (as $n \to \infty$) となる数列とし, $\mathbf{u}_n$ を $(\mathcal{P}_{\gamma_n})$ の ground state とする. このとき部分列をとれば, $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の ground state $\mathbf{w}$ と $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ が存在して

$$\|\gamma_n \mathbf{u}_n(\cdot + \xi_n) - \mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \to 0, \quad \text{as } n \to \infty.$$

$(V_1, V_2, V_3) \not\equiv (V_{1,\infty}, V_{2,\infty}, V_{3,\infty})$ なら $\xi_n = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ とできる.

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x)u_1 - |u_1|^{p-1}u_1 = \gamma u_2 u_3, \\ -\Delta u_2 + V_2(x)u_2 - |u_2|^{p-1}u_2 = \gamma u_1 u_3, \\ -\Delta u_3 + V_3(x)u_3 - |u_3|^{p-1}u_3 = \gamma u_1 u_2. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\gamma)$$

$$\begin{cases} -\Delta w_1 + V_1(x)w_1 = w_2 w_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta w_2 + V_2(x)w_2 = w_1 w_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta w_3 + V_3(x)w_3 = w_1 w_2 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$$

[3] K. Kurata and Y. Osada, Asymptotic expansion of the ground state energy for nonlinear Schrödinger system with three wave interaction, Commun. Pure Appl. Anal., (2021), 13 pp. doi: 10.3934/cpaa.2021157

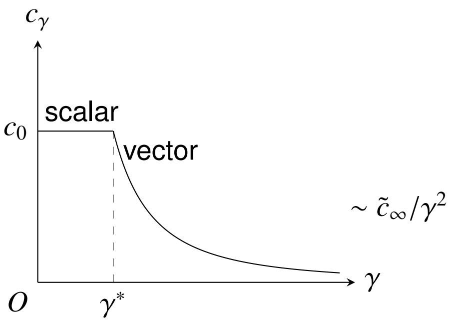
主結果 2 (Kurata-O. (2021) [3])

c_γ は $[0,\infty)$ で単調減少かつ連続である. さらに, ある $\gamma^*>0$ が存在して $c_\gamma=c_0$ $(0\le\gamma\le\gamma^*)$ かつ $c_\gamma<c_0$ $(\gamma>\gamma^*)$. さらに, $\gamma>\gamma^*$ に対して, $(\mathcal{P}_\gamma)$ の全ての ground state は vector solution になり, $0\le\gamma<\gamma^*$ に対して, $(\mathcal{P}_\gamma)$ の全ての ground state は scalar solution になる.

$\gamma^* := \max\{\gamma\ge 0 \mid c_\gamma=c_0\}$.

$c_\gamma=\tilde{c}_\infty/\gamma^2+o(1/\gamma^2)$ (as $\gamma\to\infty$).

$$\begin{cases} -\Delta u_1+V_1(x)u_1-|u_1|^{p-1}u_1={\color{red}\gamma}u_2u_3, \\ -\Delta u_2+V_2(x)u_2-|u_2|^{p-1}u_2={\color{red}\gamma}u_1u_3, \\ -\Delta u_3+V_3(x)u_3-|u_3|^{p-1}u_3={\color{red}\gamma}u_1u_2. \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_\gamma)$$



[3] K. Kurata and Y. Osada, Asymptotic expansion of the ground state energy for nonlinear Schrödinger system with three wave interaction, Commun. Pure Appl. Anal., (2021), 13 pp. doi: 10.3934/cpaa.2021157