Decompositions of 3-manifolds with some handlebodies and their applications

埼玉大学　理工学研究科　博士後期課程2年
小川　将輝

自己紹介
出身　千葉県

所属　埼玉大学理工学研究科

経歴：
2018年　創価大学工学部卒
2020年　埼玉大学博士前期課程卒

専門：低次元トポロジー。

動機・位置付け

材料科学において、ブロックコポリマーのミクロ相分離構造を調べることはその材料の性質や解析する一つの手段である。一方一部のミクロ相分離構造は3次元多様体のハンドル体による分解に対応する事がわかってきた。このようなことから、3次元トポロジーの研究手法を使い、ブロックコポリマーのミクロ相分離構造を調べることを目指す。

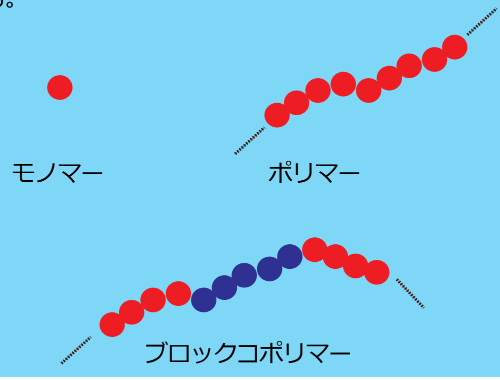
謝辞

埼玉大学理工学研究科下川航也先生、阪田直樹博士に感謝申し上げます。この研究はJSPS科研費JP20J20545の助成を受けたものです。

相分離構造とハンドル体分解

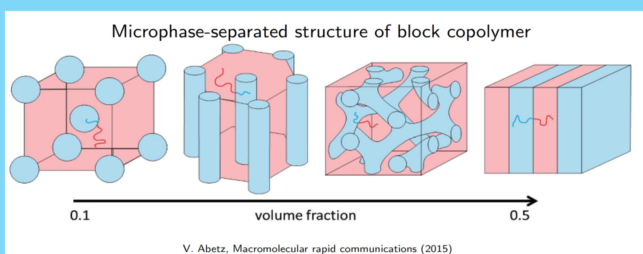
ブロックコポリマー

ブロックコポリマーは性質の異なるモノマーが何種類か含まれるポリマーである。



ブロックコポリマーのミクロ相分離構造

一般に、ブロックコポリマーでできた物質を見た時、それらは無秩序状態にあるが、温度の変化や圧力をかけることによって同じ性質のモノマー同士が集まる。この時、違う性質のモノマーごとに相ができる。このようにそれぞれのモノマー同士が集まり、相をなすことをミクロ相分離という。こうしてできた構造のことをミクロ相分離構造という。

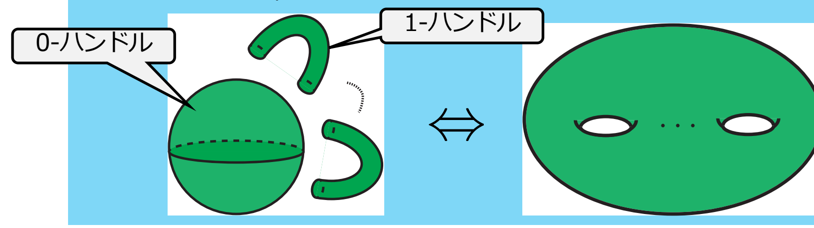


ミクロ相分離構造が$\mathbb{R}^3$内にあるとみなす。これをモデル化するために、ミクロ相分離構造が三重周期的であると仮定して考える。そうすると、$\mathbb{R}^3$を三重周期で割った空間は三次元トーラスT^3となる。よってミクロ相分離構造を考えることはT^3の分解を考えれば良いことになる。特にその中で、共連続構造であり、領域がハンドル体になっているものを考える。

以下、ハンドル体による3次元多様体の分解の定式化を考える

ハンドル体

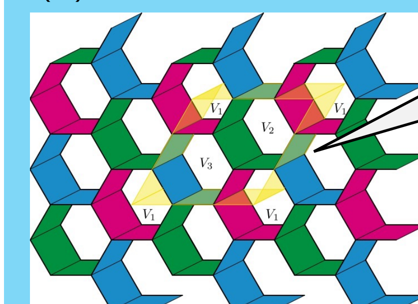
種数gのハンドル体とは3次元０-ハンドルに3次元1-ハンドルをg個接着して得られる3次元多様体のことを言う。



ハンドル体分解

3次元多様体のハンドル体分解とは、3次元多様体がハンドル体のいくつかの和集合になっている時をいう。特にハンドル体二つを境界で張り合わせてできる分解をヒーガード分解と呼ぶ。任意の有向閉3次元多様体はこのような分解を持つ事が知られている。
一般に、ハンドル体三つ以上で分解するときにどのような分解になるかということはあまり知られていない。有向閉三次元多様体をハンドル体三つ以上で分解するとき、ハンドル体同士の共通部分が作る2次元複体は一般に複雑なものになる。

(例)



この黄色の領域の内部が3次元多様体T^3に対応しており、V_iそれぞれがハンドル体に対応している。

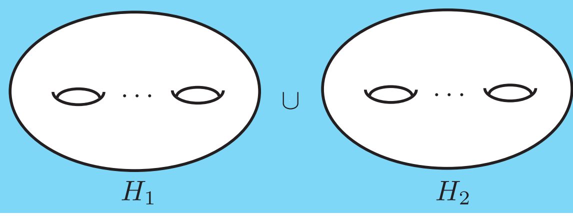
$$T^3 \cong \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$$

上のようにして定式化することで、共連続構造をT^3のハンドル体による分解に置き換えて考える事ができるようになる。

3次元多様体の分解の種類

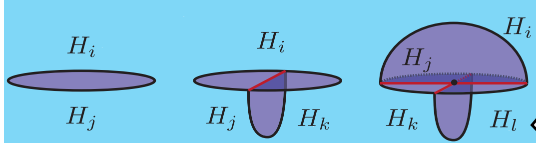
ヒーガード分解

3次元多様体が二つのハンドル体を境界で張り合わせてできている時、この分解をその3次元多様体のヒーガード分解と呼ぶ。
特に、全ての連結有向閉3次元多様体はヒーガード分解を持つ事が知られている。



ハンドル体分解(Simple)

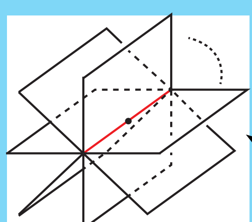
3次元多様体がいくつかのハンドル体を境界の部分集合で張り合わせてできている時、この分解をハンドル体分解と呼ぶ。特に、その張り合わせ方がsimple polyhedronに沿って貼り合わせているときに、simpleなハンドル体分解と呼ぶ。



H_iなどの領域に対応するのがハンドル体である。よって、このような2次元複体の補集合がハンドル体になっている。

ハンドル体分解(Multibranched)

ハンドル体分解であり、特に、その張り合わせ方がmultibranched surfaceに沿って貼り合わせているときに、多重分岐ハンドル体分解と呼ぶ。



領域に対応するのがハンドル体である。よって、このような2次元複体の補集合がハンドル体になっている。

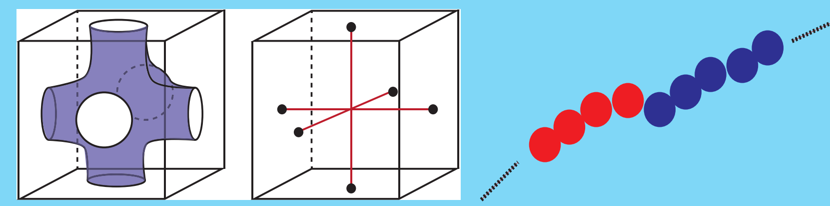
$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

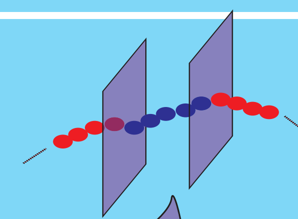
相分離構造

Bicontinuous pattern

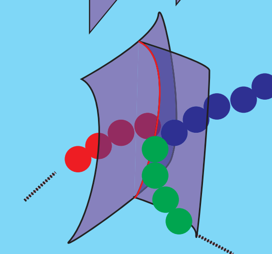
2種類のモノマーでブロックコポリマーをなしている時に、ジブロックコポリマーといい、ブロックコポリマーの一番基本的なものになる。二つの相からなる共連続構造をbicontinuous patternという。



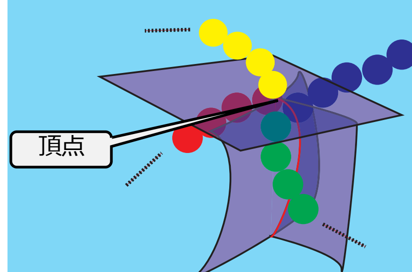
三つ以上の性質の異なるモノマーからなるブロックコポリマーのミクロ相分離構造においてその界面を局所的に見る。一つ目に考えられるのはその点は2種類のモノマーの相の界面上の点になっている場合である(右図)。

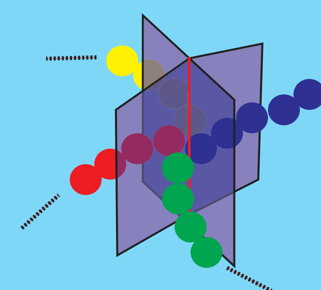


二つ目に考えられるのが、3種類のモノマーの領域の界面の境界上の点である。界面上のそのような点の集合は右図の赤い曲線のようになっている。



4種類のモノマーの相の界面の境界上の点は、以下の二つのような状況が考えられる。



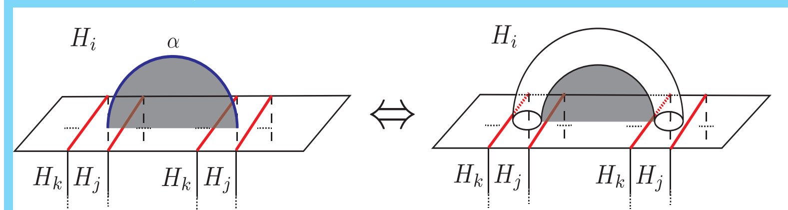


新しい分解を作る方法(安定化)

安定化

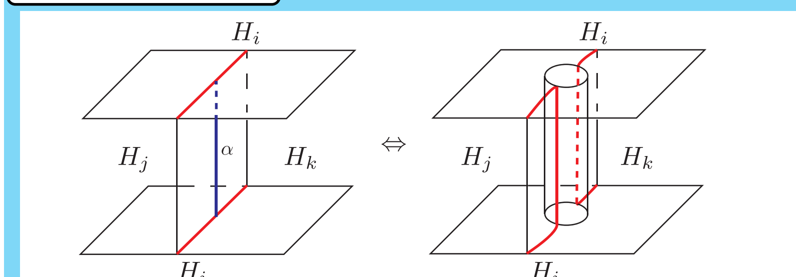
3次元多様体のハンドル体分解が与えられた時、与えられた分解から新たな分解を得る一つの方法として安定化という操作がある。
安定化を行うことで、分解を与えているハンドル体の種数が上がる。
ある3次元多様体のヒーガード分解が二つ与えられた時に、それらに何回か安定化の操作をすると、同じヒーガード分解を与える事が知られている。
以下、ハンドル体分解の安定化を紹介する。これらはヒーガード分解の安定化の一般化になっている。

Type 0 安定化



Type 0 安定化を行うことで種数の上がるハンドル体は二つである。

Type 1 安定化



Type 1 安定化を行うことで種数の上がるハンドル体は一つである。

安定化定理

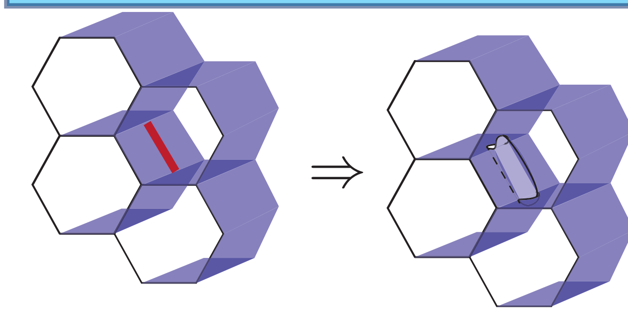
定理 (I-K-M-O-O-S-S)

同じ三次元多様体の２つのsimpleでproperなハンドル体分解はtype0、type1安定化と0-2, 2-0, 2-3操作を有限回施すことでイソトピックにする事ができる。

定理 (O. 2021)

同じ三次元多様体の２つのMultibranchedでproperなハンドル体分解でハンドル体の数が四つ以下であるものはtype0、type1安定化とXI, IX操作を有限回施すことでイソトピックにする事ができる。

上で、properとは、それぞれのハンドル体が自己交差を持たないという条件である。上の定理が述べていることは、二つのハンドル体分解が与えられた時、左の安定化という操作と幾つかの操作を何回か行うことで同じハンドル体分解になるということを言っている。



左の図はtype 1安定化を施した図である。type 1安定化はハンドル体同士の交わりである曲面上の線分に沿って行われる。この時繋がれる領域が同じ領域になっているときにその領域の種数が1増える。

全てのハンドル体分解は安定化という操作をすることで移り合う。このことから、安定化をして色々な相分離構造を作り、より良い性質の材料を構成できる事が期待される。

分類問題

ハンドル体分解の分類

ハンドル体分解が与えられた時、その分解が違うか同じかを述べるために同値関係が必要である。
ハンドル体分解の同値性は、そのハンドル体同士の交わりとなる2次元複体が三次元多様体の中でアンビエントイソトピックであるならば同じ分解であると定義される。
つまり、ある2次元複体の三次元多様体への埋め込みで、その補集合がハンドル体となるようなものの埋め込みのアンビエントイソトピーでの分類である。この時、そのような2次元複体のことをbranched surface やpartitionなどと呼ぶ。

レンズ空間と3次元球面での分類

3次元球面のハンドル体三つによる分解を考える。この時、3次元球面はそれぞれのハンドル体の種数が1以下となるようなハンドル体による分解を持つ。種数が1以下となるハンドル体三つで3次元球面を分解したときにどのような分解になるかは完全にわかっている。ここでは二つつが3次元球体あと一つは種数１のハンドル体となっている時の3次元球面の分解の分類を例に挙げる。

定理 (O. 2020)

3次元球面のtype-(0, 0, 1)分解はアンビエントイソトピーで移り合うものを除いて一意に定まる。

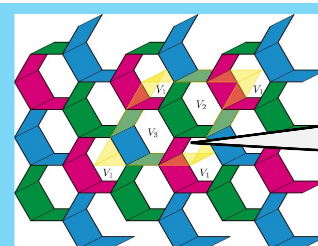
上の定理は3次元球体が二つの場合を考えているが、種数1のハンドル体が二つになるだけでそのbranched surface同相類が増え、その同相類ごとに埋め込みがいくつあるかということを調べる必要が出てくる。よって、3次元球面という簡単な3次元多様体であっても、そのハンドル体分解の数は、一つとは限らない。　これは3次元球面のヒーガード分解はどんな種数でもただ一つになるなることを考えるとハンドル体分解はヒーガード分解と比べ、その分解はより複雑であるということである。
3次元多様体にはレンズ空間と呼ばれる種数１のヒーガード分解を持つクラスが存在する。このような3次元多様体に対しても同様の結果を得る事ができている。

T^3のハンドル体分解の分類

ミクロ相分離構造を分類することが目的であったので、T^3 のハンドル体分解を考える。 T^3のハンドル体分解は3次元球面やレンズ空間とちがい複雑なものも考えられるのでその分類をすることは一般には難しい。しかし、以下のような事が知られている。

定理 (I-K-M-O-O-S-S)

T^3のtype-(1, 1, 1)分解は同相で移り合うものを除いて一意に定まる。



上の定理で述べている分解は左の図のように、honeycombの基本領域を考えた時に得られるT^3 のハンドル体分解である。

上の定理が述べていることは、同相写像で移り合うようなT^3内のbranched surface は同じものとして考えたときに、その埋め込みは一つに定まるということを述べている。よって、先に述べたアンビエントイソトピーでの分類ではない。実際にアンビエントイソトピー類について調べてみると、無限個のアンビエントイソトピー類が安定化の操作によって得られることが分かっている。さらに、もっと言えば、これはハンドル体の数が三つである分解である。もしハンドル体の数が増えれば分解はより複雑になり、分類することも簡単ではなくなる。また、ハンドル体の種数が上がれば上がるほど、分解の様子はより複雑になる。

[1]K. Ishihara, Y. Koda, R. Mishina, M. Ogawa, M. Ozawa, N. Sakata and K.Shimokawa. *Handlebody decomposition of 3-manifolds and polycontinuous patterns*. preprint (2021).

[2]M.Ogawa, *Decomposition of the 3-sphere and lens spaces with three handlebodies*, To appear in J. Knot Theory Ramification (2020)

[3]M.Ogawa, *Stably equivalence of handlebody decomposition whose partition is a multibranched surface* preprint (2021)