くさび型領域内の安定な非等方的 capillary 超曲面

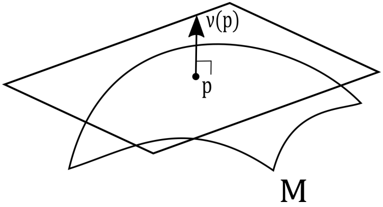
岡　元基 (Oka Motoki)

九州大学数理学府博士後期課程 1 年

アブストラクト: 結晶の持つエネルギーと知られる非等方的エネルギーを用いた自由境界問題について研究を行った．今回は 2 枚の平面からなるくさび型領域内にあり、くさび型領域の境界とくさび型の角に接触する曲面の非等方的エネルギーの極小解の決定を行った。現実の結晶が何かの物体に付着して存在していることから、非等方的エネルギーの変分問題の基本的な問題として数学のみならず, 材料工学などの異分野に対しても重要であると言える.

November 13, 2021

M を $\mathbb{R}^3$ 内のなめらかな曲面とする．M の単位法ベクトル場を ν で表す．ν は単位ベクトルなので，単位球面 S^2 上の点とみなせることに注意．



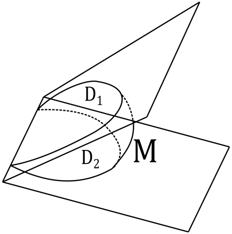
Definition 1 (非等方的エネルギー)

γ を単位球面 S^2 上の正値連続関数とする．このとき M の γ による非等方的エネルギー $\mathcal{F}_\gamma(M)$ を曲面の法線方向に依存する重み γ をつけて曲面上での積分をとったもの

$$\mathcal{F}_\gamma(M) = \int_M \gamma(\nu) dA$$

で定義する．非等方的エネルギーは結晶が持つエネルギーとして以前から研究されている．

エネルギー



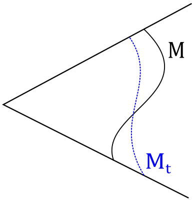
本研究では図のようなくさび型領域内にあり，くさび型領域の境界とくさび型の角に接触するような曲面であって「与えられた体積を囲む」ものの中でのエネルギー極小解を求めた．ただし，ここで言うエネルギーは，次で定義される「全エネルギー」のことである．

Definition 2 (エネルギー)

濡れ定数と呼ばれる実定数 $\omega_i \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathcal{W}(M) = \omega_1 A(D_1) + \omega_2 A(D_2)$ を M の濡れエネルギーと呼ぶ．ただし $A(D_i)$ は D_i の面積とする．さらに

$$E(M) = \mathcal{F}_\gamma(M) + \mathcal{W}(M)$$

を M の全エネルギーと呼ぶ．



次に，曲面のエネルギー極小解の定義を紹介する．曲面 M の変分とは曲面の族 $\{M_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ で $M_0 = M$ となるものを言う．さらに M をくさび型領域内の曲面としたとき，M の囲む体積が一定で境界がくさび型から出ないような変分を M の許容変分と呼ぶことにする．

Definition 3

M をくさび型領域内の曲面とする．M が全エネルギーの臨界点であるとは，任意の M の許容変分に対して $\frac{d}{dt}E(M_t)\Big|_{t=0} = 0$ が成り立つものを言う．さらに臨界点 M が全エネルギーの安定解であるとは，任意の M の許容変分に対して

$$\frac{d^2}{dt^2}E(M_t)|_{t=0} \geq 0$$

が成立するものを言う．

主結果

今までの議論では $\mathbb{R}^3$ 内の曲面について扱っていたが, 同様のことが $n+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の n 次元超曲面についても成り立つ. 次の結果は n 次元超曲面についての結果である.

本研究の成果

今回の研究で, 濡れ定数 ω_i が正のとき, くさび型領域内にあり, くさび型とくさび型の角に接触するような超曲面の安定解がどのような図形になるかを決定した. 結果として γ が C^2 級で strictly convex という性質を持つと仮定し, さらに $n \geq 3$ のとき D_i が凸と仮定するならば, 安定解は γ による Wulff 図形と呼ばれる曲面の一部に限ることを証明した. Wulff 図形とは, G.Wulff によって定義された単結晶の数理モデルである.

最後に今後の課題として以下を挙げる.

今後の課題

- 濡れ定数が負の場合にについて.
- $n \geq 3$ のとき D_i が凸について.
- γ が strictly convex でない場合や微分不可能な点を持つ場合について.