Asymptotic limit of fast rotation for the incompressible Navier-Stokes equations in a 3D layer

大山 広樹（おおやま ひろき）
(髙田 了氏（九州大学 大学院数理学研究院）との共同研究)

九州大学 大学院数理学府 博士課程 1 年, 宮崎県宮崎市出身
mail: oyama.hiroki.310@s.kyushu-u.ac.jp

異分野・異業種研究交流会 2021
2021 年 11 月 13 日 (土)

目標

- スケール臨界な関数空間に属する初期値に対する方程式 (NSC) の時間大域的適切性を示す.
- 時間大域的な時空積分ノルムの意味で, 回転速度無限大における解の漸近極限を調べる.

導入

Coriolis 力付き Navier-Stokes 方程式:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \Omega e_3 \times u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0 & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{D}, \\ \operatorname{div} u = 0 & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{D}, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{D}. \end{cases} \tag{NSC}$$

- $\mathbb{D} := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$: 3 次元層状領域, $x = (x_h, x_3) \in \mathbb{D} \Leftrightarrow x_h = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_3 \in \mathbb{T}$
- $u = u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$: 流体の速度場
- $p = p(t,x)$: 流体の圧力
- $u_0 = u_0(x) = (u_{0,1}(x), u_{0,2}(x), u_{0,3}(x))$: 流体の初期速度場
- $\Omega \in \mathbb{R}$: Coriolis パラメータ, $e_3 = (0,0,1)$

スケール臨界空間

$$u^\lambda(t,x) := \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad p^\lambda(t,x) := \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \Omega^\lambda := \lambda^2 \Omega \quad (\lambda > 0)$$

(u,p): Ω に対する (NSC) の解 $\Longleftrightarrow$ (u^λ, p^λ): Ω^λ に対する (NSC) の解

$$\|u(0,\cdot)\|_X = \|u^\lambda(0,\cdot)\|_X \qquad (\forall \lambda > 0)$$

を満たす時, Banach 空間 $X = X(\mathbb{R}^n)$ は (NSC) に対するスケール臨界空間と呼ばれる. (例: Sobolev 空間 $\dot{H}^{\frac{n}{2}-1}(\mathbb{R}^n)$ $n \in \mathbb{N}$, $L^2(\mathbb{R}^2)$, $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$)

先行結果 ($\mathbb{R}^3$ 上の高速回転極限)

定理 (Chemin, Desjardins, Gallagher and Grenier(2002,2006))

$u_0 = v_0 + w_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)^3 + \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)^3$ と仮定する.

- $\exists \Omega_0 = \Omega_0(u_0) > 0$ s.t. $|\Omega| \geqslant \Omega_0$ を満たす $\forall \Omega \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathbb{R}^3$ 上における (NSC) の時間大域解 u が一意的に存在する.
- $2 < q < 6$ に対して, $|\Omega| \to \infty$ の時, $u \to u^\infty$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty; L^q(\mathbb{R}^3))$.

極限方程式 (ただし, $\Delta_h = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\nabla_h = (\partial_1, \partial_2)$ 及び $u_h^\infty = (u_1^\infty, u_2^\infty)$ とする):

$$\begin{cases} \partial_t u^\infty - \Delta_h u^\infty + (u_h^\infty \cdot \nabla_h) u^\infty + (\nabla_h p, 0) = 0,\ \nabla_h \cdot u_h^\infty = 0, & (t, x_h) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ u^\infty(0, x_h) = v_0(x_h), & x_h \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad \text{(Lim)}$$

補題 (Chemin, Desjardins, Gallagher and Grenier (2002, 2006))

$0 < r < R < \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ とする. このとき, $\exists C = C(r,R,p) > 0$ s.t.$\nabla \cdot v = 0$, $\mathrm{supp}\,\widehat{v_0} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid r < |\xi_3|, |\xi| < R\}$ を満たす $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$ 及び $\Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して,

$$\|e^{t(\Delta - \Omega \mathbb{P} e_3 \times \mathbb{P})} v_0\|_{L^p(0,\infty; L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leqslant C |\Omega|^{-\frac{1}{4p}} \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

$$\mathbb{P} : L^2(\mathbb{R}^3)^3 \to \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \,\middle|\, \nabla \cdot v = 0 \right\}, \quad \text{Helmholtz 射影作用素}$$

分解

$u_0 = u_0(x)$ は $u_0 = \bar{u}_0 + \tilde{u}_0$ と分解できる. ここで, $\bar{u}_0$ と $\tilde{u}_0$ はそれぞれ

$$\bar{u}_0(x_h) = Qu_0(x_h) = \int_{\mathbb{T}} u_0(x_h, x_3)dx_3, \quad \tilde{u}_0(x) = u_0(x) - \bar{u}_0(x_h) \quad \text{と表す.}$$

$\mathbb{R}^2$ 上の $\bar{u}$ に関する発展方程式:

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u} - \Delta_h \bar{u} + \mathbb{P}[(\bar{u}_h \cdot \nabla_h)\bar{u} + Q(\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{u}] = 0, \quad \nabla_h \cdot \bar{u}_h = 0, \\ \bar{u}(0, x_h) = \bar{u}_0(x_h). \end{cases}$$

$\mathbb{D}$ 上の $\tilde{u}$ に関する発展方程式:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} - \Delta \tilde{u} + \Omega \mathbb{P}(e_3 \times \tilde{u}) + \mathbb{P}[(1-Q)(\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{u} + (\bar{u} \cdot \nabla)\tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla)\bar{u}] = 0, \quad \nabla \cdot \tilde{u} = 0, \\ \tilde{u}(0, x) = \tilde{u}_0(x). \end{cases}$$

定理 (Gallay and Roussier-Michon (2009))

$\tilde{u}_0 \in H^1(\mathbb{D})^3, \bar{u}_{0,3} \in H^1(\mathbb{R}^2), (\nabla \times \bar{u}_0)_3 \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^2)$ を満たす $u_0 \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})^3$ をとる.

- $\exists \Omega_0 = \Omega_0(u_0) > 0$ *s.t.* $\exists ! u$: $|\Omega| \geqslant \Omega_0$ に対する (NSC) の時間大域解.
- $u \to$ *2 次元 Lamb-Oseen 渦 in* $L^1(\mathbb{R}^2)$ *as* $t \to \infty$.

主結果 ($\mathbb{D}$ 上の高速回転極限)

定理 1 (O. and Takada (2021))

$\forall u_0 = \bar{u}_0 + \tilde{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)^3 + (1-Q)\dot{H}^{1/2}(\mathbb{D})^3$, $\exists \Omega_0 = \Omega_0(\bar{u}_0, \tilde{u}_0) > 0$ s.t. $|\Omega| \geqslant \Omega_0$ を満たす $\forall \Omega \in \mathbb{R}$ に対して, $\exists ! u = \bar{u} + \tilde{u}$: (NSC) の時間大域解 s.t.

$$\bar{u} \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^2))^3 \cap L^2(0,\infty; \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))^3,$$

$$\tilde{u} \in C([0,\infty); (1-Q)\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{D}))^3 \cap L^2(0,\infty; (1-Q)\dot{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{D}))^3.$$

更に, $2/p + 2/q = 1$ を満たす $2 < p, q < \infty$ に対して,

$$\lim_{|\Omega| \to \infty} \|u - u^\infty\|_{L^p(0,\infty; L^q(\mathbb{D}))} = 0.$$

ここで, u^∞ は $\bar{u}_0$ を初期値に持つ (Lim) の時間大域解であり, 次を満たす:

$$u^\infty \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^2))^3 \cap L^2(0,\infty; \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))^3.$$

補題 (Gallay and Roussier-Michon (2009), O. and Takada (2021))

$R > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 及び $2 \leqslant q \leqslant \infty$ とする. このとき, $\exists C = C(R,p,q) > 0$ s.t. $\nabla \cdot \tilde{u}_0 = 0$, $\operatorname{supp} \widehat{\tilde{u}_0} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^2 \times 2\pi\mathbb{Z} \mid |\xi| < R\}$ を満たす $\tilde{u}_0 \in (1-Q)L^2(\mathbb{D})^3$ 及び $\Omega \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\|e^{t(\Delta - \Omega \mathbb{P} e_3 \times \mathbb{P})} \tilde{u}_0\|_{L^p(0,\infty; L^q(\mathbb{D}))} \leqslant C \langle \Omega \rangle^{-\frac{1}{4}\beta} \|\tilde{u}_0\|_{L^2(\mathbb{D})}.$$

ここで, $\langle \cdot \rangle = (1 + |\cdot|^2)^{\frac{1}{2}}$, $\beta = \min\left\{\frac{1}{p}, 1 - \frac{2}{q}\right\}$.