

時間変更過程の収束と緊密性について

大井拓夢

京都大学 数理解析研究所 D1

自己紹介

名前：大井拓夢

所属：京都大学数理解析研究所

学年：博士課程 1 年

専門：確率論

メールアドレス：ooitaku@kurims.kyoto-u.ac.jp

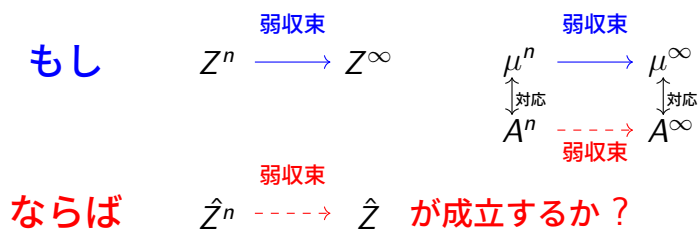
研究内容

Z^n : Hunt 過程 (右連続で左極限をもつ強 Markov 過程でいくつかの条件を満たすもの)

μ^n : Z^n に関する Revuz 測度

A^n : μ^n に対応する PCAF

$\hat{Z}_t^n := Z_{(A^n)_t^{-1}}^n$: Z^n の A^n による時間変更過程 に対して



動機と背景

Liouville Brown 運動とは Liouville 測度 (Gauss 自由場を用いて構成されるランダムな測度) を用いて Brown 運動を時間変更した確率過程である。

Liouville Brown 運動は様々なランダムグラフ上のランダムウォークの極限と予想/証明され、共形場理論や統計力学などと密接なかわりを持つ。

Brown 運動は 2-安定過程であり、Liouville Brown 運動を α -安定過程へ一般化することができる。この α -安定過程版が $\alpha \rightarrow 2$ のときに Liouville Brown 運動へ収束するかどうか調べるのが元々の研究の動機である。

Liouville Brown 運動やその α -安定過程版は時間変更過程であるため、収束を調べるにあたり、より一般の問題を考える。すなわち次の問題を考える。

問. 元の確率過程と Revuz 測度が収束している場合に、対応する時間変更過程は収束するか？

時間変更過程の収束はいくつかのモデルでは [BC],[C],[CHK],[BG] などの先行研究があるが、連続モデルの離散近似を行うという視点の物が比較的多いため、連続モデル間の収束などの先行研究はあまり多くない。

ここでは Liouville Brown 運動などの元々の動機に関連したことは触れず、一般の時間変更過程に関することを述べる。以下のページの構成は、P.2 : 時間変更過程に関する準備、P.3 : 確率過程間の収束に関する準備、P.4 : 問の答え (反例の構成)、P.5 : 緊密性に関する諸結果となっている。

準備 1. 時間変更過程

本頁では時間変更過程に関する用語の説明を行う。いずれも、**数学的な定義の後に直感的な説明を記している。**

ここは次の設定のもとで考える。

E : 局所コンパクト可分距離空間 (例: 実数空間 \mathbb{R}^d など)

m : E 上の正値 Radon 測度で台が全体のもの (例: 実数空間上の Lebesgue 測度など)

$Z = \{Z_t\}_{t \geq 0}$: E 値対称 Hunt 過程 (例: Brown 運動など)

$\{\theta_t\}$: シフト作用素 (確率過程の時刻を t ずらす作用素)

定義

\mathbb{R} 値確率過程 $A = \{A_t\}_{t \geq 0}$ が Z の正値連続加法的汎関数 (PCAF) とは θ_t -不変な可測集合 Λ が存在して次の 2 条件を満たすものである。

(A.1) 任意の $t \geq 0$ に対し $A_t|_{\Lambda}$ は $\mathcal{F}_t|_{\Lambda}$ -可測。

(A.2) 任意の $\omega \in \Lambda$ に対し $A_t(\omega)$ は連続で $A_0(\omega) = 0$ で、任意の $t, s \geq 0$ に対し $A_{t+s}(\omega) = A_t(\omega) + A_s(\theta_t \omega)$ を満たす。

すなわち PCAF とは **原点を通るランダムで連続な単調増加関数**であり、PCAF を用いて確率過程の時間変更 (移動速度の変更) を行う。

定義

E 上の正の Borel 測度 μ が Z に関し **なめらか**とは次の 2 つを満たすこと

(1) \mathcal{E} -極集合 N に対し $\mu(N) = 0$

(2) $\{F_k\}$ が存在して $\overline{\cup_{k \geq 1} F_k}^{\mathcal{E}_1} = \mathcal{F}$ かつ $\mu(F_k) < \infty$

ここで $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は Z に対応する $L^2(E; m)$ 上の Dirichlet 形式。

すなわち、なめらかな測度とは **確率過程 Z が通る場所のみを測る測度**である。

定理 ([Chen-福島, Thm.4.1.1])

(1) Z の PCAF A に対し、 E 上のなめらかな測度 μ がただ一つ存在し次の等式を満たす。任意の正の Borel 可測関数 f に対し

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_E \mathbb{E}_x \left(\int_0^t f(Z_s) dA_s \right) dm(x)$$

(2) Z に関し E 上なめらかな測度 μ に対し、PCAF A が存在し上の等式を満たす。

上の定理で、PCAF に対応するなめらかな測度を **Revuz 測度**と言う。**PCAF と Revuz 測度は 1 対 1 に対応している**ことが重要である。そのため片方の性質を調べることでもう一方の性質を知ることができる。

定義

PCAF A に対し、 $A_t^{-1} := \inf \{s > 0 : A_s > t\}$ と定める。

このとき $\hat{Z}_t := Z_{A_t^{-1}}$ を Z の A による **時間変更過程**と呼ぶ。

例 1.

Z を \mathbb{R}^d 上の Brown 運動、 $\mu(dx) := 2dx$ とすると、 μ に対応する PCAF は $A_t = 2t$ であり、時間変更過程は $\hat{Z}_t = Z_{t/2}$ となる。つまり時間変更過程は **元の Brown 運動の半分のスピードで動く確率過程**である。

例 2.

Z を \mathbb{R}^2 の単位球面上の反射壁 Brown 運動、 $\mu(dx) := \mathbf{1}_{\partial B(0;1)}(x)dx$ とすると、 μ に対応する PCAF は $A_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\partial B(0;1)}(Z_s) ds$ であり、時間変更過程は単位円上の対称 Cauchy 過程 (1-安定過程) である。つまり **単位円にぶつかった時間のみ取り出した、ジャンプだけで移動する確率過程**である。

準備2. 確率過程間に入れる位相:Skorkhod 位相

本頁では、確率過程の収束を扱うために Skorkhod 位相と呼ばれる 2 種類の位相について説明する。 $T > 0$ と 1 以上の整数 d を固定する。

$$D([0, T], \mathbb{R}^d) := \{x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d ; \text{càdlàg (右連続で左極限をもつ)}\},$$

$$D([0, \infty), \mathbb{R}^d) := \{x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d ; \text{càdlàg}\} \text{ と定める。}$$

確率過程 $\{Z_t\}$ は t に関する関数と見なすことで $D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ のランダムな元として扱えるため $D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ に位相を導入する。

1. Skorkhod の J_1 位相

$\Lambda_T := \{\lambda : [0, T] \rightarrow [0, T] ; \text{連続な単調増加関数で } \lambda(0) = 0, \lambda(T) = T\}$ と定める。このとき $x_1, x_2 \in D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ に対し次を定める。

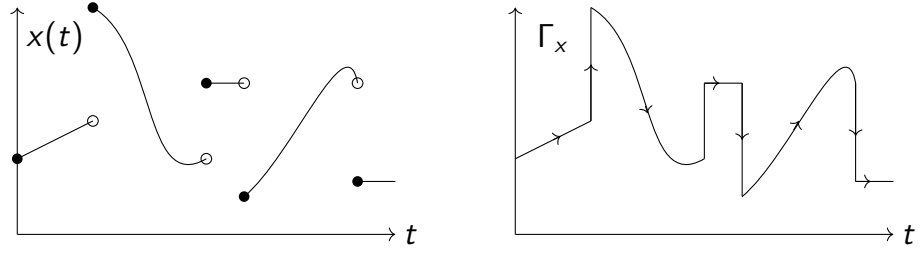
$$d_{J_1}^T(x_1, x_2) := \inf_{\lambda \in \Lambda_T} \left\{ \sup_{t \leq T} |x_1(\lambda(t)) - x_2(t)| + \sup_{t \leq T} |\lambda(t) - t| \right\}$$

$$d_{J_1}(x_1, x_2) := \int_0^\infty e^{-T} (d_{J_1}^T(x_1, x_2) \wedge 1) dT$$

$D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ 上に距離 d_{J_1} で誘導される位相を Skorkhod の J_1 位相と呼ぶ。 J_1 位相は不連続な関数たちの収束を測る位相であり、**関数の収束を、ジャンプする時刻とジャンプの幅も含めて考えることができる。**

2. Skorkhod の M_1 位相

$x \in D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ に対し Γ_x を関数 x のジャンプを縦につないだグラフとする。このグラフ上に左から右に向かって向きを決める (下図参照)。



$\Pi_T(x) := \{(r, u) : [0, 1] \rightarrow \Gamma_x ; \text{連続で単調非減少, } r(0) = 0, r(1) = T\}$ と置く。 $x_1, x_2 \in D([0, T], \mathbb{R}^d)$ に対し次を定める。

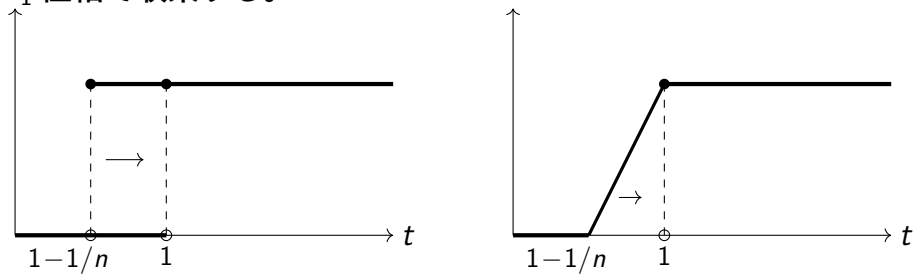
$$d_{M_1}^T(x_1, x_2) := \inf_{(r_i, u_i) \in \Pi_T(x_i)} \left\{ \sup_{s \leq 1} |r_1(s) - r_2(s)| + \sup_{s \leq 1} |u_1(s) - u_2(s)| \right\}$$

$$d_{M_1}(x_1, x_2) := \int_0^\infty e^{-T} (d_{M_1}^T(x_1, x_2) \wedge 1) dT$$

$D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ 上に距離 d_{M_1} で誘導される位相を Skorkhod の M_1 位相と呼ぶ。 M_1 位相も J_1 位相と同様に不連続な関数たちの収束を測る位相であるが、ジャンプの前後をつないでできたグラフ間の距離を測るため、**より多くの関数の収束を考えることができる。**

例.

左図: $\mathbf{1}_{[1-\frac{1}{n}, \infty)}$ は $\mathbf{1}_{[1, \infty)}$ に J_1 位相で収束 (従って M_1 位相でも収束) する。
 右図: $n(t - (1 - \frac{1}{n}))\mathbf{1}_{[1-\frac{1}{n}, 1)} + \mathbf{1}_{[1, \infty)}$ は $\mathbf{1}_{[1, \infty)}$ に J_1 位相では収束しないが M_1 位相で収束する。



これにより**確率過程 Z をランダムな $D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ の元と見て、確率過程間の弱収束を考えることができる。**ここで、 Z^n が Z へ弱収束 (分布収束) するとは任意の有界連続関数 f に対し $f(Z^n)$ の期待値が $f(Z)$ の期待値へ収束することであり、これは有限次元分布収束かつ緊密と同値であることが知られている (Whitt, Thm.11.6.6)。

問の答え：反例の構成

P.1でも述べたように、以下の問題を考える。

問
 Z^n : Hunt 過程、 μ^n : Z^n に関する Revuz 測度、
 A^n : μ^n に対応する PCAF、 $\hat{Z}_t^n := Z_{(A^n)_t^{-1}}^n$: 時間変更過程に対して
もし Z^n が Z^∞ へ弱収束し μ^n も μ^∞ へ弱収束するならば対応する PCAF A^n は A^∞ へ弱収束するか？ また、時間変更過程 \hat{Z}^n は \hat{Z}^∞ へ弱収束するか？

答え
 一般には成立しない。

以下では実際に構成した反例について説明する。

$\tau^{(k)}$ を独立同分布な確率変数でその分布が $\mathbb{P}(\tau^{(k)} \leq t) = 1 - e^{-t}$ とする。
 簡単のため $\tau^{(0)} = 0$ とおく。
 $x \neq 0, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, に対し \mathbb{R} 上の確率過程 Z^n と PCAF A^n を

$$Z_t^n := Z_t := \begin{cases} x & : \sum_{k=0}^{2m} \tau^{(k)} \leq t < \sum_{k=0}^{2m+1} \tau^{(k)}, \\ -x & : \sum_{k=0}^{2m+1} \tau^{(k)} \leq t < \sum_{k=0}^{2m+2} \tau^{(k)}, \end{cases} \quad A_t^n := \int_0^t (\sin(nZ_s) + 1) ds.$$

と定める。つまり Z^n は指数時間経つごとに軸に関して対称な点へジャンプする確率過程である。

すると A^n に対応する Revuz 測度は $\mu^n(dx) = (\sin(nx) + 1)dx$ であり、Riemann-Lebesgue の補題により $\mu^n(dx)$ は $\mu^\infty(dx) = dx$ へ弱収束する。しかし、 A_t^n は $A_t^\infty = t$ へ収束しない。更に、 Z の A^n による時間変更過程 \hat{Z}^n も \hat{Z}^∞ へ弱収束しない。

この場合、時間変更過程は具体的に次のように書き表すことができる。

$$\hat{Z}_t^n := Z_{(A^n)_t^{-1}}^n = \begin{cases} x: \sum_{k=0}^{2m} (1 + (-1)^{k+1} \sin(nx)) \tau^{(k)} \leq t < \sum_{k=0}^{2m+1} (1 + (-1)^{k+1} \sin(nx)) \tau^{(k)}, \\ -x: \sum_{k=0}^{2m+1} (1 + (-1)^{k+1} \sin(nx)) \tau^{(k)} \leq t < \sum_{k=0}^{2m+2} (1 + (-1)^{k+1} \sin(nx)) \tau^{(k)}, \end{cases}$$

すなわち \hat{Z}^n は指数時間の $(1 + \sin(nx))$ 倍の時間が経過すると軸に関して対称な点へジャンプし、その後 $(1 - \sin(nx))$ 倍の指数時間が経過すると初期位置へジャンプし、以降はこれを繰り返す。

この時間変更過程は元の確率過程のジャンプする時刻を変更したものであり、**ジャンプする時刻が振動した状態になっている**ため $n \rightarrow \infty$ で分布収束せず、従って J_1 位相でも M_1 位相でも弱収束しない

また、 $\sin(n_k x) \rightarrow -1$ となる部分列 $\{n_k\}$ について考えることで $\{\hat{Z}^n\}$ は緊密でないことが分かる (緊密性は弱収束の必要条件である。緊密性については次頁でより詳しく述べる。)

この反例ではなぜ時間変更過程が収束しないのか
 元の確率過程と Revuz 測度が収束していても、**対応する PCAF の傾きが 0 へ近づくような部分列が存在したために**時間変更過程のジャンプする時刻が振動してしまい、分布収束せず緊密性も壊れ、収束しなかった。

構成した反例のように、元の確率過程が収束していても時間変更過程の収束は一般には成立しないが、時間変更過程の収束はそれ自体の興味以外にも、連続な確率モデルの離散近似などで有用であるため、どれ程の条件を課せば収束するのかを考える。そのため次頁では、収束の必要条件の一つである緊密性について考える。

緊密性に関する諸結果

確率過程の弱収束には緊密性が必要である。
本頁では、確率論特有の概念である緊密性についての定義と直感的な説明を与えた後、時間変更過程の緊密性の十分条件に関する諸結果について述べる。

定義

$\{Z^n\}$ が J_1 位相 (resp. M_1 位相) で緊密であるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対し J_1 位相 (resp. M_1 位相) でコンパクトな集合 K が存在し任意の n に対し $Z^n \in K$ となる確率が $1 - \varepsilon$ より大きくなることである。

つまり緊密性とは**確率過程たちが大きく外れた所へ逃げないという性質**であり、緊密であれば任意の部分列に対し収束部分列が存在する。

Z^n を Hunt 過程、 A^n を Z^n の PCAF とする。次のような条件を課すことで時間変更のスケールや時間変更過程の緊密性が言える。

命題 (O.)

$t^* > 0$ と $c > 0$ が存在して任意の n に対し確率 1 で $A_{t^*}^n > c$ を満たすと仮定する。
このとき $\{A^n\}$ が M_1 位相で緊密ならば $\{(A^n)^{-1}\}$ も M_1 位相で緊密。

命題 (O.)

$\{Z^n\}$ と $\{(A^n)^{-1}\}$ がそれぞれ J_1 位相で緊密で、 A^n が確率 1 で真に単調増加であれば $\{\hat{Z}^n := Z_{(A^n)^{-1}}^n\}$ も J_1 位相で緊密。

これらの結果は M_1 位相での逆写像の連続性や緊密性に関する必要十分条件を確かめることで証明される。また、PCAF に関しての仮定を弱めた場合次のことが分かる。

命題 (O.)

$\{Z^n\}$ が J_1 位相で緊密で、 $\{(A^n)^{-1}\}$ が M_1 位相で緊密で、部分列極限が連続ならば $\{\hat{Z}^n := Z_{(A^n)^{-1}}^n\}$ は (局所) L_1 位相で緊密。

一般に、部分列極限が連続という仮定を外すことはできない。ジャンプする時刻に長時間滞在するような場合を考えることで反例が構成できる。

時間変更過程の緊密性が分かると、任意の部分列に対し収束部分列が存在するため、その収束先がすべて同じものであれば時間変更過程の弱収束が言える。そのため時間変更過程の緊密性を調べることは収束を考える上で重要である。

参考文献

[BC] M. T. BARLOW, J. ČERNÝ, Convergence to fractional kinetics for random walks associated with unbounded conductances, Probab. Theory Related Fields 149, 639-673, 2011.
[BG] N. BERESTYCKI, E. GWYNNE, Random walks on mated-CRT planar maps and Liouville Brownian motion, arXiv:2003.10320.
[C] J. ČERNÝ, On two-dimensional random walk among heavy-tailed conductances, Electron. J. Probab. 16, 293-313, 2011.
[CF] Z.-Q. CHEN AND M. FUKUSHIMA, Symmetric Markov processes, time change, and boundary theory, Princeton University Press, Princeton, 2012.
[CHK] D. CROYDON, B. HAMBLY, T. KUMAGAI, Time-changes of stochastic processes associated with resistance forms, Electron. J. Probab. 22, 41 pp, 2017.
[GRV] C. GARBAN, R. RHODES, V. VARGAS, Liouville Brownian motion, Ann. Probab. 44 3076-3110, 2016.
[W] W. WHITT, Stochastic-process limits. An introduction to stochastic-process limits and their application to queues, Springer-Verlag, New York, 2002.