

高次元イジング模型の摂動に伴う平衡状態の振る舞いについて

白杵峻亮

京都大学大学院 理学研究科 D1

2021年11月13日

Abstract

d 次元イジング模型は強磁性体の模型であり、 \mathbb{Z}^d 上のスピんに隣接するスピンの相互作用を考えたのものである。模型が相互作用の下でとる安定な状態は平衡状態と呼ばれる。高温のイジング模型では平衡状態は一つに定まるが、 $d \geq 2$ の場合では、温度を下げていくと、ある臨界点を境に平衡状態が二つ以上存在するという現象、つまり相転移が起こることが知られている。(外部磁場はないものとする。)このような系の、平衡状態が一つに定まる、または一つに定まらず二つ以上存在するという性質が、系の相互作用の摂動に対して安定かどうか、という問題は、純粹数学としてだけでなく物理的な直感から見ても面白い問題だろう。この発表では、 d 次元イジング模型において、系が十分高温ならば、相互作用の摂動に対して平衡状態が一意であるという性質が保存され、また、系が十分低温ならば、相互作用を対称性を保って摂動させると、平衡状態が二つ以上あるという性質が保存されることを説明する。

arXiv:2110.15540

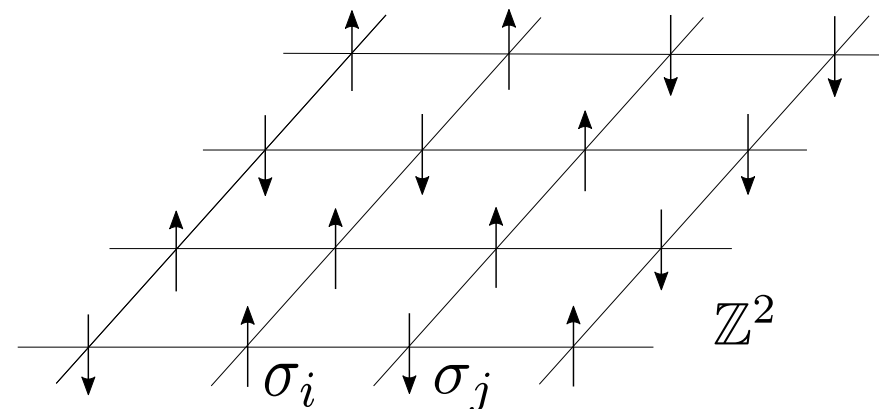
イジング模型

イジング模型は、 d 次元格子 \mathbb{Z}^d 上に上向き (1) または下向き (-1) のいずれかの状態をとるスピンの並んでいる系に、次のような、隣合う格子点 i, j におけるスピン σ_i, σ_j の間の相互作用

$$-J\sigma_i\sigma_j$$

を考えたものである。ここで、 J は系の温度の逆数に比例する正の定数 (逆温度定数) である。 \mathbb{Z}^d を原子の並びとみなせば、イジング模型は物理的には強磁性体の単純なモデルとみなせ、スピンの向きが揃っている時にその物体は (自発的に) 磁性を持つと解釈される。

$\Omega = \{1, -1\}^{\mathbb{Z}^d}$ と置くと、 Ω は \mathbb{Z}^d 上のスピンたちがとる状態の全体の集合である。数学的には、系がとる統計的な状態は Ω 上の確率測度として表され、その中でも相互作用の下でとる安定な状態は**平衡状態**と呼ばれる。



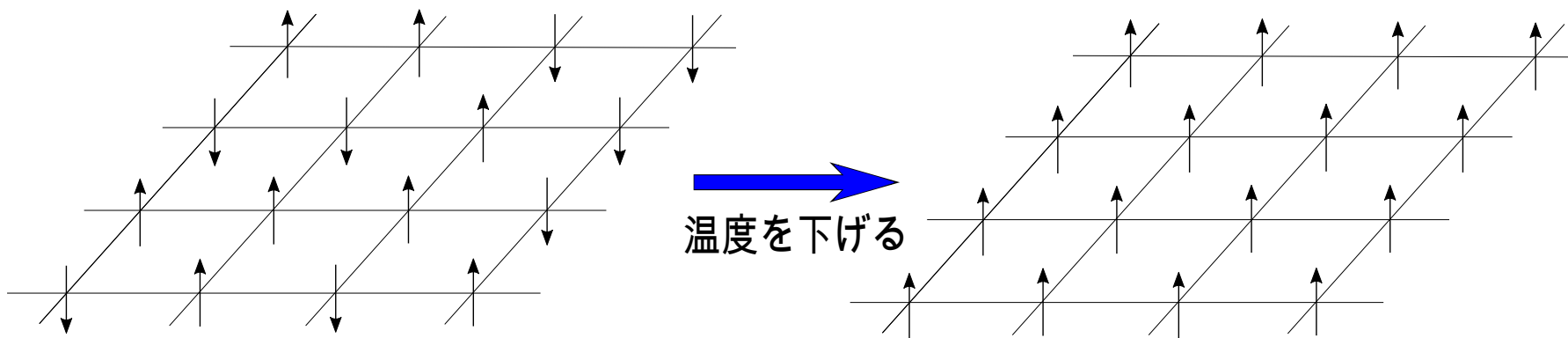
イジング模型の相転移

- イジング模型において、系の温度が高い、すなわち J が小さいと、スピン間の相互作用が弱く、それぞれのスピンは無秩序な向きをとる。実際、 J が十分小さいとき、イジング模型の平衡状態は一つしかないことが示される。
- 系の温度が低い、すなわち J が大きいと、スピン間の相互作用が強くなり、それぞれのスピンは勝手な向きをとれなくなる。よって、スピンの向きが揃っている状態は安定である。実際、 J が十分大きいとき、イジング模型の平衡状態は二つ以上存在することが示される。但し、これは次元が2以上の時に限り起こる。

イジング模型の場合は、より詳しく次が知られている：

イジング模型の相転移

次元が2以上とすると、ある定数 J_c (すなわちある温度 T_c) があり、 $J < J_c$ (すなわち系の温度が T_c より高い) ならば、イジング模型の平衡状態をただ一つだけであり、 $J > J_c$ (すなわち系の温度が T_c より低い) ならば、平衡状態は二つ以上存在する。



相互作用の摂動（高温の場合）

イジング模型における相互作用 $-J\sigma_i\sigma_j$ を十分小さな別の相互作用 Δ だけ摂動させ、このとき系の平衡状態の様子がどう変化するか調べたい。より具体的に、系の平衡状態が一つに決まる、または二つ以上あるという性質が、摂動によって保たれるか否かを問題にしたい。純粋数学では一般に、系に相互作用が与えられたときに、それに対応する平衡状態の様子が相互作用の摂動によってどう変化するかは自明ではない。また物理的な直感としては相互作用の摂動は、外場の変化などの系の外からの微小な影響や相互作用の微小なずれと解釈できるので、この問題は物理的にも意味のある問題である。

十分高温のイジング模型に対しては次の結果が成り立つ：

定理 1

J が十分小さい（すなわち系が十分高温である）とき、イジング模型の相互作用を十分小さい相互作用によって摂動させると、その系もただ一つの平衡状態をもつ。

相互作用の摂動（低温の場合）

イジング模型が十分低温の場合、摂動させる相互作用 Δ として、まず次のようなものを考える。すなわち、十分小さい 0 でない実数 h に対し

$$\Delta = h\sigma_i \quad ; \quad \text{一様な外部磁場}$$

とする。このとき、全てのスピンはこの外部磁場によって決まる同じ方向を向き、この状態が安定となる。実際、数学的にも、 $h \neq 0$ がどれだけ小さくても、低温イジング模型を $\Delta = h\sigma_i$ だけ摂動させた系の平衡状態は一つだけであることが示され、低温イジング模型の「平衡状態が二つ以上ある」という性質は摂動で保たれないことがわかる。

摂動前の低温イジング模型において、2つの平衡状態として現れるのは、各スピンの正の確率で上を向いているような平衡状態と、正の確率で下を向いている（すなわち、スピンの磁化している）平衡状態である。上の外部磁場による摂動では、これらの相互作用は残らなかったが、摂動させる相互作用 Δ がスピンの向きに関して対称であるとき、すなわち、系の状態 $\sigma \in \Omega$ に対する Δ の値が、 σ の全てのスピンの向きを逆にした状態に対する Δ の値と等しいとき、摂動させた系においてもこれらの相互作用たちが「残る」ことが示される。従って、次が成り立つ：

定理 2

J が十分大きい（すなわち系が十分低温である）とき、イジング模型の相互作用を十分小さい相互作用によって、対称性を保って摂動させると、その系も平衡状態を二つ以上もつ。