Sparse tree 上のグラフラプラシアンのハウスドルフ次元

九州大学 数理学府 博士 2 年 宇治野 広大
ujino.kouta.699@s.kyushu-u.ac.jp

研究の動機

主にシュレディンガー作用素 H のスペクトル $\sigma(H)$ を調べている.
物理的にスペクトル $\sigma(H)$ は粒子のエネルギーの実現値とされる.

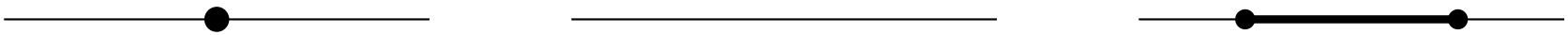
$$H \text{ のスペクトル } \sigma(H) \cdots \begin{cases} \text{点スペクトル } \sigma_p(H) \\ \text{特異連続スペクトル } \sigma_{sc}(H) \\ \text{絶対連続スペクトル } \sigma_{ac}(H) \end{cases}$$

点, 絶対連続スペクトルの粒子の時間発展の挙動は分かっている (束縛, 散乱状態) が, 特異連続スペクトルについては未解決問題が多い.

スペクトルの図

点スペクトル　　特異連続スペクトル　　絶対連続スペクトル

?



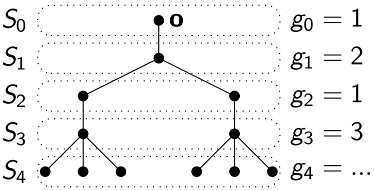
グラフ, tree の定義

- $G=(V,E)$ がグラフ $\Leftrightarrow V$ が可算集合,$E\subset\{e\in 2^V \mid \#e=2\}$ となる組.
- グラフ $G=(V,E)$ が **tree** $\Leftrightarrow$
  連結かつ任意の $u,v\in V$ の道が一意的に定まる.

Radial tree の定義

グラフ $G=(V,E)$ が **radial tree** $\Leftrightarrow$
$n=0,1,2,\dots$ に対して $u,v\in S_n$ ならば $deg(u)=deg(v)$ が成立するものである.
$g_0=deg(o)$, $g_n=deg(u)-1$ $(u\in S_n, n\geq 1)$ とする.

Radial tree の図



Γ-sparse tree の定義

$0<\Gamma<1$ とする.

$$g_n=\begin{cases} n^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}} & (n=2^{m^m}, m\in\mathbb{N}) \\ 1 & (\text{その他}). \end{cases}$$

$2^{1^1}=2, 2^{2^2}=16, 2^{3^3}=134217728$,
$2^{4^4}\approx 1.1579209\times 10^{77}$.
(ちなみに 1 無量大数 $=10^{68}$)

グラフラプラシアン Δ の定義と分解

$l^2(V) = \{f : V \to \mathbb{C} \mid \sum_{v \in V} |f(v)|^2 < \infty\}$ を複素ヒルベルト空間とし, Δ を $l^2(V)$ 上で $\Delta f(u) = \sum_{v : u \sim v}(f(v) - f(u))$ と定義する.

$l^2(V) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n$ が存在し, 各 M_n は Δ を約する. $-\Delta : M_n \to M_n$ は右のように行列表示できる.

$d_j = g_{j+p_N+1} + 1, a_j = \sqrt{g_{j+p_N+1}}$ とする. $(\alpha_{p_N} + 1 \leq n \leq \alpha_{p_N+1},$ $\alpha_n = \prod_{m=0}^{n-1} g_m, p_n = 2^{n^n}.)$

$$\begin{pmatrix} d_0 & -a_0 & & & \\ -a_0 & d_1 & -a_1 & & \\ & -a_1 & d_2 & -a_2 & \\ & & -a_2 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

グラフラプラシアン $H = -\Delta$ の特異連続スペクトル $\sigma_{sc}(H)$

$H = -\Delta$ とする. 次の命題は **Breuer, J. [1]** によって示された

命題

$\sigma_{ac}(H) = \emptyset$, $\sigma_p(H) \cap (0, 4) = \emptyset$, $\emptyset \neq \sigma_{sc}(H) \cap [0, 4]$.

ハウスドルフ次元の定義

$\alpha \in [0, \infty)$, $\delta > 0$ とする．測度 $h^\alpha : \mathcal{B}^1 \to [0, \infty]$ を以下で定義する．

$$h^\alpha(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} d(A_i)^\alpha \mid \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \textbf{is a } \delta\text{-cover} \textbf{ of } A \right\}.$$

h^α を α 次元ハウスドルフ測度という．A のハウスドルフ次元 $\mathrm{dim}A$ を $\mathrm{dim}A = \sup \{\alpha \mid h^\alpha(A) \neq 0\}$ と定義する．

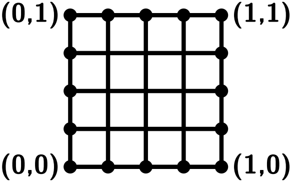
具体的にざっくり言うと $\cdots$

測りたいものに対して距離 $\frac{1}{n} > 0$ で分割する．区間 $[0, 1]$ とすると

区間 $[0, 1]$ は n 個に分割される．区間 $[0, 1]$ の長さの計算は

$$1 = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{分割の長さ}} \times \underbrace{n}_{\text{分割の個数}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^1} \times n^1 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^\alpha} \times n^1 = \lim_{n \to \infty} n^{1-\alpha}$$

平面 $[0,1]\times[0,1]$ の分割を考える．



平面 $[0,1]\times[0,1]$ の面積を考えると

$$
\begin{aligned}
1 &= \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{分割の面積}} \times \underbrace{n^2}_{\text{分割の個数}} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{2-\alpha}
\end{aligned}
$$

主結果

H を Γ**-sparse tree** のグラフラプラシアン，H のスペクトル測度を区間 $[0,4]$ に制限したものを E とする．このとき $\dim E = \Gamma$ となる．

[証明の概略] Breuer, J. [1] により $\Gamma \leq \dim E \leq \frac{2\Gamma}{1+\Gamma}$ は分かっていた．離散シュレディンガー作用素に対して **intermittency function** $\beta(p)$ が定まり，$\dim E \leq \beta(p)$ となることが分かっていた．そこで $\beta(p)$ を計算し $\beta(p) = \frac{p+1}{p+\Gamma^{-1}}$ であることを証明した．

[参考文献]

[1] **Breuer, J. (2007). Singular continuous spectrum for the Laplacian on certain sparse trees. Communications in mathematical physics, 269(3), 851-857.**