

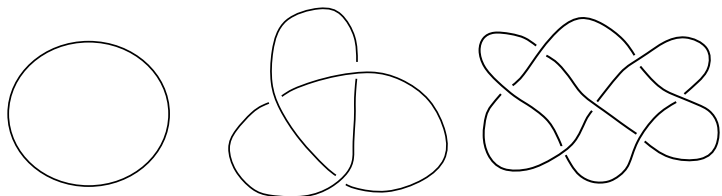
結び目のゲージ理論的不変量とその応用

井森隼人（京都大学理学研究科/日本学術振興会特別研究員DC1）

本研究の目的は、結び目に対する精密な不変量を構成することで、結び目やそれに関連する低次元トポロジーのこれまでに知られていなかった性質を解明することである。

結び目

3次元球面に滑らかに埋め込まれた円周。



結び目不変量を用いて、結び目やそれにまつわる低次元トポロジーの様々な性質を調べる。

不変量

幾何学的対象に対して定まる数学的对象(必ずしも数値的なものとは限らない)であって、与えられた幾何学的対象がいつ異なるかを判定する。

幾何学的対象の精密な構造の違いを区別できる不変量はより強力な不変量であるといえる。

物理学

物理学に由来するゲージ理論的手法を用いると、古典的な不変量を精密化したものや、より豊富な数学的構造をもったものが得られる。

ゲージ理論的手法

(20世紀末以降発展した現代的手法)

結び目

結び目不変量

応用

ゲージ理論に由来する精密な不変量を用いると、古典的な不変量から得られなかった強力な情報が得られ、多くの未解決問題の解消にも貢献。

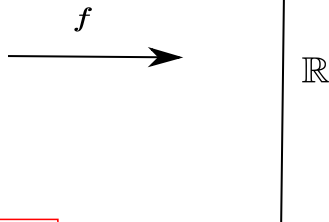
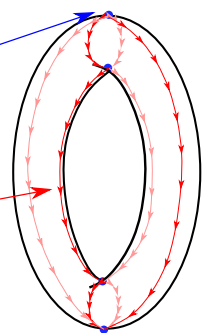
本スライドでは結び目に対するゲージ理論的不変量の構成の一つを最近の著者の研究に基づき概説する。不変量の構成には特異インスタントンと呼ばれる非線型方程式の解の空間の情報関わっている。これは古典的な結び目の不変量を精密化するもので、新しく得られたトポロジーへの応用についても述べる。

研究の背景

モース理論 有有限次元多様体上のモース関数とする。
モース関数を用いてMのホモロジー群(Morse homology)が得られる。

fの臨界点
各臨界点にはモース指数が定まる。

fのgradient flow.
ベクトル場grad fが定める
積分曲線。



チェイン複体 that 得られる

$$C_i(M, f) = \bigoplus_{p \in C(i)} \mathbb{Z} \cdot p$$

モース指数iの臨界点集合で生成

$$\langle dp, q \rangle = n(p, q)$$

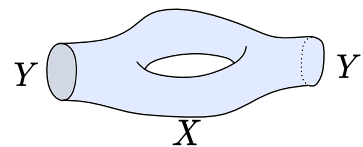
次数の差が1の臨界点の間のgradient flowの符号付き数え上げ

モース関数fに依存しない
ホモロジー群が得られる。
特異ホモロジーと同型

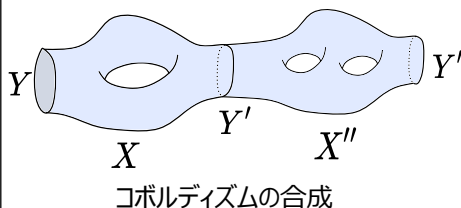
位相的場の理論(Topological Quantum Field Theory)の公理

3次元閉多様体 Y $\longrightarrow$ ベクトル空間 $H(X)$

4次元多様体 X $\longrightarrow$ ベクトル空間の射
 $M(X) : H(Y) \rightarrow H(Y')$



を対応させるものであって以下の性質をもつ。



$$H(-Y) = H(Y)^*$$

$$H(Y \sqcup Y') = H(Y) \otimes H(Y')$$

$$M(X \cup_{Y'} X') = M(X') \circ M(X)$$

$$M(Y \times [0, 1]) = \text{id}$$

3, 4次元多様体や結び目といった低次元の幾何学的対象

付随する無限次元多様体とモース関数の類似物

不変量を用いて低次元の幾何学的対象を研究する。

モース理論に類似した構成を行う

ゲージ理論に由来する無限次元の対象

低次元の幾何学的対象の不変量

条件付きで位相的場の理論(を少し変えたもの)を実現する。

インスタントン・フレア理論: SU(2)接続のゲージ同値類の空間, Chern-Simon汎関数を扱う

モノポール・フレア理論: U(1)接続とスピノル束の切断の組のゲージ同値類の空間, Chern-Simons-Dirac汎関数を扱う

ゲージ理論から得られた応用

三角形分割予想の解決(Manolescu), 結び目のProperty P予想の証明(Kronheimer-Mrowka),
ホモロジー同境界群の構造の研究(古田, Fintushel-Stern, Froyshov) などがよく知られている。

低次元多様体に対する理論は80年代～2000年代初頭に発展した。2010年代以降は結び目に対するインスタントン・フレア理論が発展しつつある。次項以降その構成を見ていく。

特異接続を用いた結び目不変量の構成

特異接続の空間

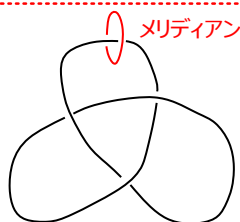
3次元多様体Y内の結び目Kを考える。PをY上のSU(2)束とする。
Kの補空間でのみ定義されるSU(2)接続を**特異接続(singular connection)**と呼ぶ。

特異接続はKのメリディアンに沿うホロノミー条件を満たす。

$$\lim_{r \rightarrow 0} \text{Hol}_{\mu(r)}(A) \sim \begin{bmatrix} e^{2\pi i \alpha} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i \alpha} \end{bmatrix}$$

半径rのメリディアンに沿った
特異接続Aのホロノミー

$\alpha \in (0, 1/2)$ となる値(ホロノミー・パラメータ)



特異接続全体のなす空間にはPの自己同型群 = **ゲージ変換群**が作用する。
この群作用による商空間を $\mathcal{B}(Y, K, \alpha)$ とする。

特異Chern-Simons汎関数

α が有理数のとき

$$CS(A + a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{Y \setminus K} \text{Tr}(d_A a \wedge a + \frac{1}{3} a \wedge a \wedge a)$$

によって定義される $\mathcal{B}(Y, K, \alpha)$ 上の S^1 値関数。

Aはある固定された特異接続。

商特異点をもつので、滑らかな多様体ではない。
商特異点をのぞくと無限次元多様体になる。

$\mathcal{B}(Y, K, \alpha)$ から商特異点を除いた空間を扱う。

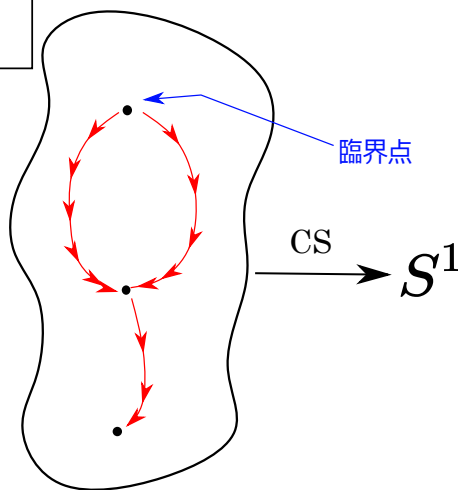
特異接続に関する微分方程式

$$\frac{d}{dt} A_t = -\text{grad} CS(A_t)$$

の解を**gradient flow**と呼ぶ。

gradient flowはCSの臨界点を結ぶ曲線を与える。

formal gradientのなす曲線のホモトピー類は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ で分類される。



結び目不変量構成へのstrategy

特異Chern-Simons汎関数を無限次元多様体上のMorse関数と見なしMorseホモロジーの類似物を構成する。

問題点

チェイン複体の微分はgradient flowの数え上げで定義されるが、この数え上げは一般に無限になる。

問題点への対処

gradient flowの数え上げを形式的無限和として定義する。

$$n(p, q) = N_0 \lambda^{e_0} + N_1 \lambda^{e_1} + N_2 \lambda^{e_2} + \dots \in \Lambda[T^{\pm 1}]$$

↑
指数の差が1の2つの臨界点p,qをつなぐgradient flowの数え上げ

↓
各係数は多項式

↑
ビコフ環と呼ばれる環の一種

$$N_i = n_{i,-N} T^{-N} + n_{i,-N+1} T^{-N+1} + \dots + n_{i,M} T^M$$

→ この多項式の各係数はgradient flowをホモトピー類ごとに分けて数え上げたもの。

結び目の特異インスタントンホモロジー

(Y, K)をホモロジー球面とその内部の結び目Kのペアとする。

$\alpha \in (0, 1/2)$ を有理数のパラメータ(であって技術的条件をみたすもの)とする。

モース・ホモロジーと同様の構成によりチェイン複体 $(C_*^\alpha(Y, K), d)$ が得られる。

ホモロジー群をとると(Y, K)の位相不変量の族 $I_*^\alpha(Y, K)$ が得られる。

Kronheimer-Mrowka, Echeverria, Daemi-Scadutoらによって複数の変種が構成されている。著者は後者3氏による構成を一般化した。

同変フレアー理論とフロイショフ型不変量

可約接続

特異接続のゲージ同値類の空間で商特異点を引き起こす接続を可約接続と呼ぶ。
Yがホモロジー球面のとき、結び目Kの補空間にはChern-Simons汎関数の可約な臨界点のゲージ同値類がただひとつ存在。

S-複体

特異インスタントンホモロジーの構成では、可約接続の情報は無視されていた。可約接続の情報を付加した不変量を構成する。(同変フレアー理論)

フレアー・チェイン複体上の射 v, δ_1, δ_2 が定義される。

$$v: C_*^\alpha(Y, K) \longrightarrow C_*^\alpha(Y, K)$$

$$\delta_1: C_*^\alpha(Y, K) \longrightarrow \Lambda[T^{\pm 1}]$$

$$\delta_2: \Lambda[T^{\pm 1}] \longrightarrow C_*^\alpha(Y, K)$$

次数の差が2の臨界点の間のgradient flowの数え上げから v が定まる。

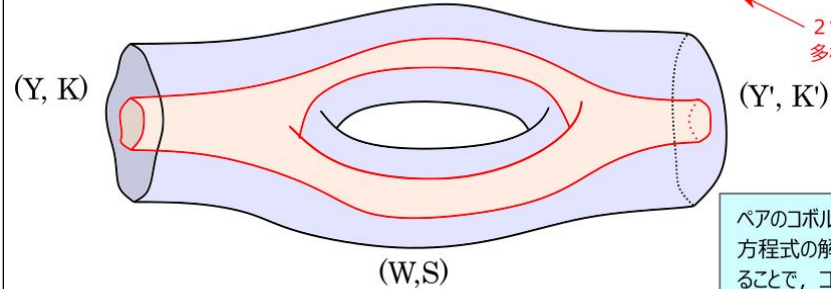
可約な臨界点へと流れ込むgradient flowを数え上げることで δ_1 が定まる。

可約な臨界点から流れ出るgradient flowを数え上げることで δ_2 が定まる。

可約な臨界点

コボルディズム射

2つのペア $(Y, K), (Y', K')$ をつなぐペアのコボルディズム (W, S) を考える。



2つのペアをつなぐ境界付き4次元多様体と曲面からなる。

ペアのコボルディズム (W, S) 上で非線型微分方程式の解=特異インスタントンを数え上げることで、コボルディズム射が定義される。

ペアのコボルディズムであって、ある技術的仮定を満たすもの(負定値コボルディズム)が与えられると、S-複体の間の射

$$\tilde{C}(W, S): \tilde{C}_*^\alpha(Y, K) \rightarrow \tilde{C}_*^\alpha(Y', K')$$

が誘導される。

(Y, K) に対するS-複体は位相的場の理論(TQFT)の性質を条件付きで満たす不変量。

フロイショフ型不変量

正のフロイショフ型不変量

フレアー・チェイン複体 $C_*^\alpha(Y, K)$ のサイクルであって、 v で j 回送ったあと δ_1 で送って0にならないものを考える。このような j が存在するとき、最小の j を (Y, K) のフロイショフ型不変量(Frøysyov type invariant)と呼び、 $h^\alpha(Y, K)$ と書く。

負のフロイショフ型不変量

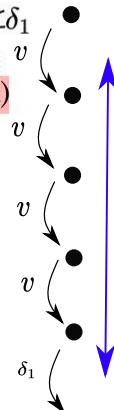
上記のような j が存在しない場合、ペア (Y, K) の向き付けを変えた $(-Y, -K)$ を考える。このとき $(-Y, -K)$ は正のフロイショフ型不変量をもち、

$$h^\alpha(Y, K) = -h^\alpha(-Y, -K)$$

によって負のフロイショフ型不変量が定まる。

性質

双方向に負定値コボルディズムがあるとき $h^\alpha(Y, K) = h^\alpha(Y', K')$ 。



このような射の合成が消えない最小の高さを測ることで位相不変量が得られる。

可約な臨界点

$$\tilde{C}_*^\alpha(Y, K) = C_*^\alpha(Y, K) \oplus C_{*-1}^\alpha(Y, K) \oplus \Lambda[T^{\pm 1}]$$

$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ v & -d & \delta_2 \\ \delta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と定義すると、組 $(\tilde{C}_*^\alpha(Y, K), \tilde{d})$ はチェイン複体になる。

このようなチェイン複体をS-複体(S-complex)と呼ぶ。S-複体に対して、チェイン・ホモトピーに類する概念(Sチェイン・ホモトピー)が定義される。

特に $(\tilde{C}_*^\alpha(Y, K), \tilde{d})$ のSチェイン・ホモトピー類は (Y, K) の位相不変量になる。

結び目コンコードスへの応用

S-複体を用いた, 低次元トポロジーへの応用を紹介する.

3次元球面 S^3 内の結び目 K を考える.

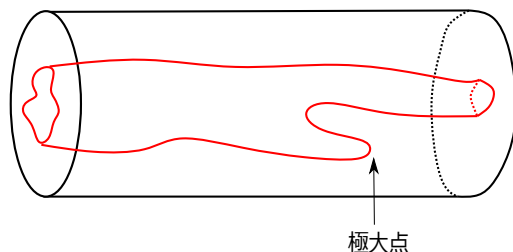
2つの結び目 K, K' をつなぐペアのコボルディズム (W, S) であって

$$W = S^3 \times [0, 1], S = S^1 \times [0, 1]$$

となるものを **コンコードス (concordance)** と呼ぶ.

コンコードスであって射影 $S^3 \times [0, 1] \supset S \rightarrow [0, 1]$ が極大点をもたないモース関数になるものを **リボン・コンコードス (ribbon concordance)** と呼ぶ.

リボン・コンコードスでない
コンコードス.



極大点

一般に2つの結び目の間にコンコードスが存在しても,
リボン・コンコードスが存在するとは限らない.

一方, ある特定の結び目に対してはリボン・コンコー
ダンスに関する予想が古くから知られている.

予想 1 (スライス・リボン予想)

自明な結び目 (unknot) U から結び目 K へのコンコードスが与えられたとき, U から K へのリボン・コンコードスが存在する.

スライス・リボン予想の拡張



予想 2

トーラス結び目から結び目 K へのコンコードスが与えられたとき, トーラス結び目から K へのリボン・コンコードスが存在する.

リボン・コンコードスと基本群の表現

結び目 K から K' へのリボン・コンコードスが存在するとき, K の補空間の基本群の $SU(2)$ 表現がコンコードス補空間の基本群に拡張することが知られている.

一方著者は前項までに述べた結び目不変量を用いて次の主張を証明した.

$T_{p,q}$ をトーラス結び目とする.

定理

$\pi_1(S^3 \setminus T_{p,q})$ の任意の $SU(2)$ 表現はコンコードス補空間の基本群に拡張する.

リボン・コンコードスの
性質から予想 2
が示唆される.

上記の定理は限定的な場合に Daemi-Scaduto
によって証明された. 著者は Daemi-Scaduto に
よる結び目不変量の構成を拡張することにより,
主張を強化した.

定理の証明には S-複体とフロイショフ不変量が用
いられる. 実際の証明にはフィルトレーションと呼ば
れる不変量の付加的な構造も必要になる.