超準的手法に基づく位相幾何学の統一的研究

A unified study of topology based on nonstandard techniques

Name. 今村拓万 Imamura, Takuma

Affiliation. 京都大学 数理解析研究所

Position. 博士研究員

Research Areas. 超準解析 位相幾何 粗幾何 計算可能性理論 理論計算機科学 数学基礎論 数学の哲学 連続体の哲学

Other Interests. 社会的選択理論 法哲学 科学哲学 障害学 etc.

Introduction. 富山大学 数学科→京都大学 理学研究科 数学・数理解析専攻 数理解析系→現職．学部では，超準解析，再帰理論，非古典論理など，数理論理学の諸分野を独学．大学院では主に数理論理学の位相幾何や粗幾何等への応用を研究している．法学，哲学，経済学等にも興味があり，数学の傍ら取り組んでいる．

Background. 通常，位相幾何と呼ばれる分野は，主に連続変形で不変となるような，空間の微細構造を研究する．それに対し，粗幾何は，空間を遠くから眺めたときに現れてくるような，空間の粗い構造を研究する．

A. Robinsonの超準解析は，Leibnizの無限小解析を現代数学の中に復活させたものとして有名であるが，より一般に，無限小や無限大のような理想的対象を取り扱う枠組みを提供するものである．

Aims. 本研究の目的は，超準解析の助けを借りて，位相幾何と粗幾何を統一することである．そのために，位相幾何や粗幾何に現れる空間概念全てを含む，一般的な空間概念を導入する．すると，位相幾何や粗幾何は，特別な空間構造の研究として特徴付けられる．この一般化された空間に対し，ホモロジーなどの代数的な不変量を構成できることを示す．

Small-scale

- 位相空間：各点 p に対し p を含む部分集合からなるフィルターを備えた空間
- 一様空間及びその一般化：二項関係からなるフィルターを備えた空間
- 射：逆像がフィルターを保存
- フィルターの極限的な振る舞いを調べるのが小尺度位相幾何

Large-scale

- 界相空間：各点 p に対し p を含む部分集合からなるイデアルを備えた空間
- 粗空間及びその一般化：二項関係からなるイデアルを備えた空間
- 射：順像がイデアルを保存
- イデアルの極限的な振る舞いを調べるのが大尺度位相幾何

- 距離空間の固有性（任意の有界閉集合はコンパクト）は位相と界相の両方の構造を巻き込んだ性質
- 位相空間に於けるコンパクト性や相対コンパクト性は界相の構造を与える
- 小尺度／大尺度の区別は明瞭ではない

Nonstandard Topology

- 位相空間：各点 p が光暈と呼ばれる無限小近傍 μ(p) を備えた空間
- 一様空間及びその一般化：超準拡大が特別な（一つの）二項関係を備えているような空間
- 射：順像が二項関係を保存
- 二項関係を調べるのが小尺度位相幾何？

Nonstandard Asymptology

- 界相空間：各点 p が銀河と呼ばれる有限近傍 G(p) を備えた空間
- 粗空間及びその一般化：超準拡大が特別な（一つの）二項関係を備えているような空間
- 射：順像が二項関係を保存
- 二項関係を調べるのが大尺度位相幾何？

- 超準拡大上の特別な二項関係の研究であるという点で一致している
- 超準的な二項関係を備えた空間を研究するものとして両者は統一される
- それでは両者に違いを齎すものは何か？

Category of Generalised Spaces

- 標準集合 X の超準拡大 $^*X$ 上の二項関係を X の**空間的構造** *spatial structure* と称する
- 空間的構造を備えた集合の間の内的（定義可能）写像であって空間的構造を順方向に保つものを射と見做す
- 一様空間の圏や粗空間の圏といった空間の圏はどれも新たな圏にfully faithfulに埋め込まれる
- よってこの新しい圏の研究は既存の（一般）位相幾何を全て内包する
- 小尺度構造は Π^{st}_1 論理式で定義可能な空間的構造と一致する
→小尺度位相幾何＝Π^{st}_1 論理式で定義可能な構造の研究
- 大尺度構造は Σ^{st}_1 論理式で定義可能な空間的構造と一致する
→大尺度位相幾何＝Σ^{st}_1 論理式で定義可能な構造の研究
- それ以外の空間的構造はどのような標準的空間概念に対応するか？
- この圏の（純粋に圏論的な）性質は標準／超準宇宙の取り方に依存するか？

Hyperchain Homology

- Čech–Vietoris理論やAlexander–Spanier理論を抽象化することで二項関係の（コ）ホモロジー論が得られる（Dowker 1952）
- 標準集合 X 上の空間的構造 R のČech複体やVietoris複体を考える
- これらの複体に属す単体の有限鎖の成す単体複体を考えても面白い不変量は得られない……代わりに超準解析的な意味での有限鎖（超有限鎖）の成す単体複体を考える
- こうして得られた単体複体の（コ）ホモロジーは特異ホモトピー不変量を与える（McCord 1972，Reveillès 1983–4，Živaljević 1987の一般化された空間概念への拡張）
- 性質の良い小尺度空間に対してČech–Vietoris理論やAlexander–Spanier理論と自然同型（Garavaglia 1978，Živaljević 1987，Korppi 2012，I. 2021）
- 大尺度空間に於ける標準的対応物は何か？
- 小尺度と大尺度の代数トポロジーとの相互関係？