反応拡散系における
時空間カオスの空間一様化挙動について

明治大学　先端数理科学研究科　博士後期1年　伊藤　隼

研究動機:
　心臓の拍動を記述する数理モデルにおいて、不整脈が起きている状態を規則的な振動へと近づけるために必要な条件とその挙動を数学的に解析・解明すること

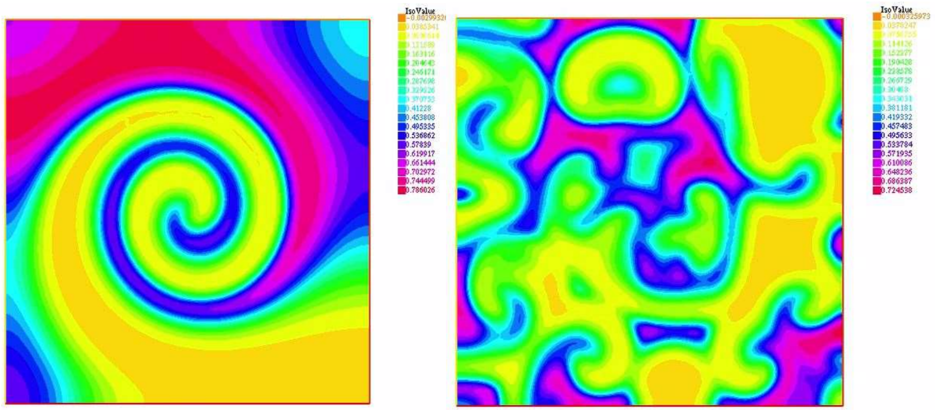
分野的位置付け:
　偏微分方程式・反応拡散系・カオス

反応拡散系の解挙動と心臓の拍動状態の関係

位相特異点：
反応拡散系の解の中で定数定常解と一致しており
空間内にある動かない点

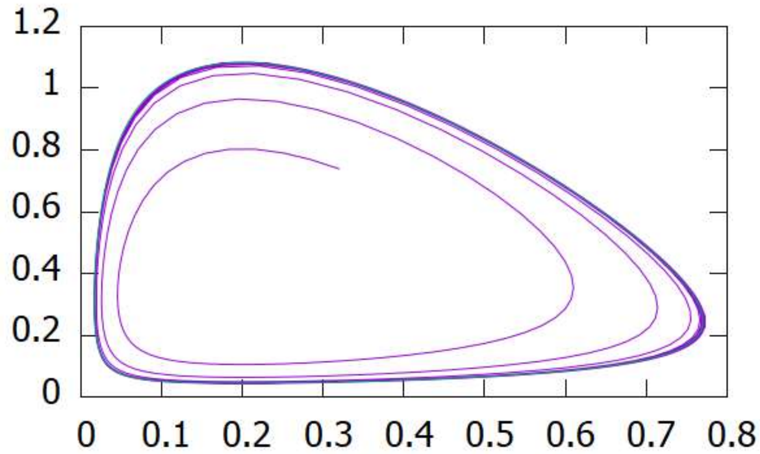
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$$

スパイラルパターンor時空間カオス



位相特異点が空間中に乱立し、
不規則な振動が発生している状態
（不整脈など）

空間一様な周期解



位相特異点が空間中に存在せず、
規則的な振動している状態
（正常な振動）

複素Ginzburg-Landau方程式の平均挙動

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \Delta z + (1 + i\omega)z - (1 + ia\omega)|z|^2 z,\ \ z \in \boldsymbol{C}\ \ a, \omega \in \boldsymbol{R}$$

リミットサイクル $|z|=1$, 定数定常解 $z = 0$

この方程式の$|z|^2$の平均 $S = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |z|^2 dx$ は次のような関係を満たす。

$$\frac{1}{2}\frac{dS}{dt} = S(1 - S)\boxed{- \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |\nabla z|^2 dx - Var\left(|z|^2\right)}$$ 空間非一様性の強さ

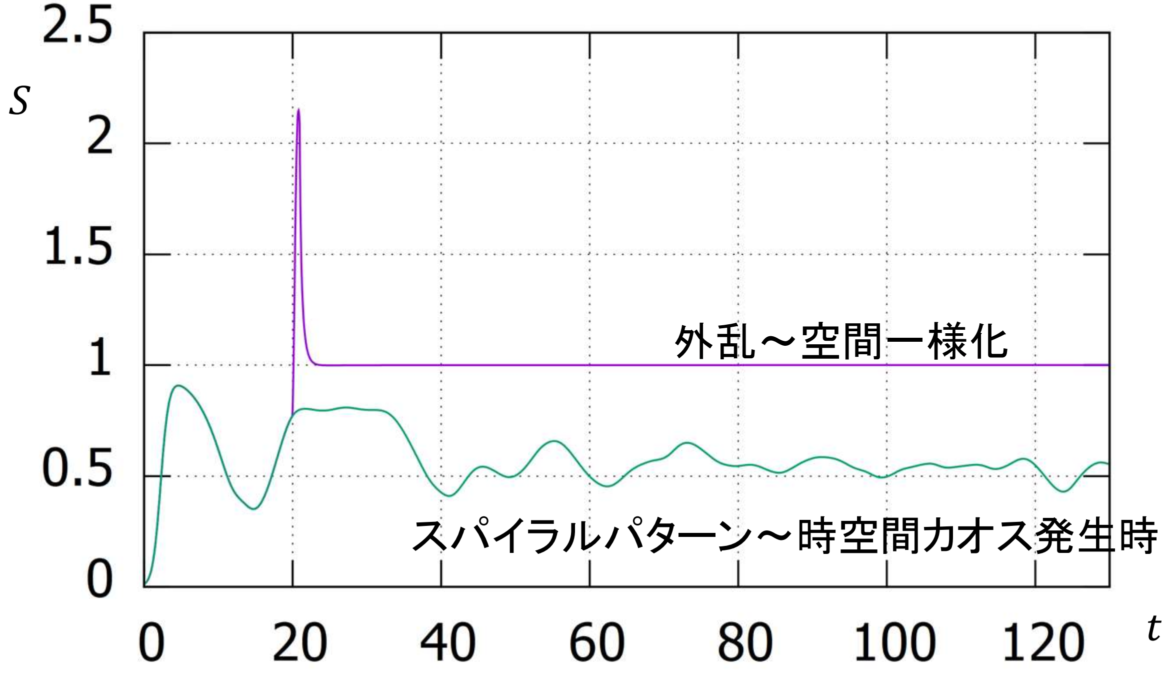
$S < 1$(平均的に解がリミットサイクルの内側にある)のとき

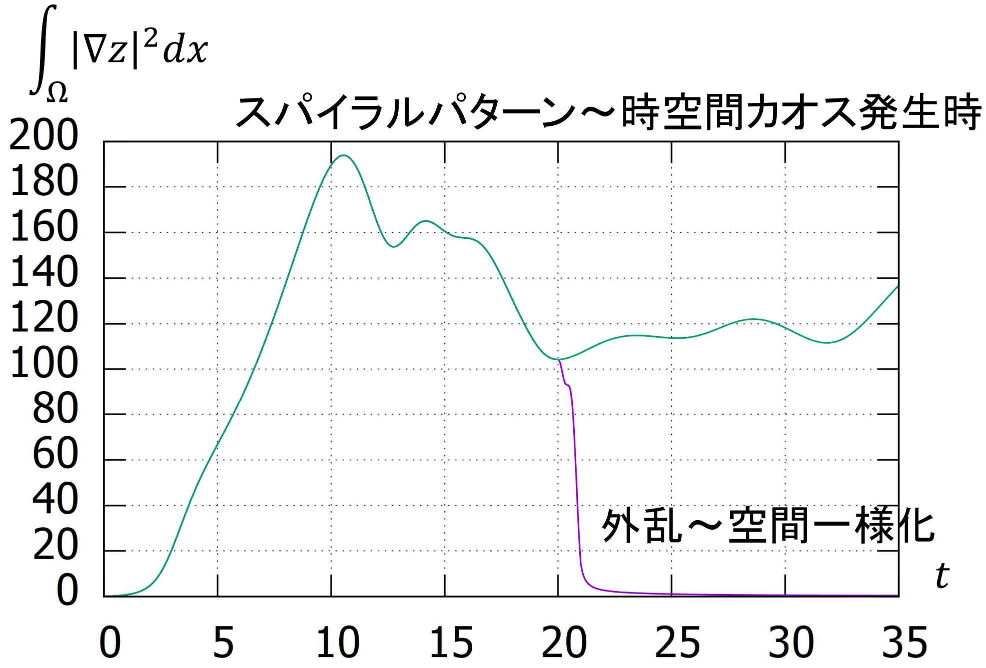
解の非一様性が高い状態だと解はリミットサイクル $|z| = 1$ に近づくことができない。

スパイラルパターンや時空間カオスが発生している状態では解は平衡解 $z = 0$ の近辺に集まっており非一様性が高い状態にあるため、解に外乱を加えて位相特異点を除去し、

$S > 1$ となる状態を作れば解は $S = 1$（リミットサイクル上の振動）へと近づきやすくなると考えられる。

外乱による位相特異点の除去と空間一様化





時刻t=20で外乱を加え、解の平均を
リミットサイクルの外側へと大きく動かすと
解は急速にリミットサイクル上の空間一様解に近づく

空間一様周期解の安定性

不規則な振動に外乱を加えたとしても、空間一様周期解が安定でなければ
規則的な振動に近づくことはできない

→空間一様周期解近傍での線形化方程式を求め、その固有値問題を導出。
最大固有値が負であれば空間一様周期解は安定となる。

$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{R}^2$ のヤコビ行列 $J = \nabla \boldsymbol{f}$ に対し、
$\int_{|z|=1} J_{11} ds < 0$ または $\int_{|z|=1} J_{22} ds < 0$ のとき、周期解が不安定になるような
拡散係数が存在する。

→複素Ginzburg-Landau方程式に関しては、どちらの積分も恒等的に負になるので、
空間一様周期解は無条件で安定となる。