

相空間のコンパクト化に基づく 空間1次元退化放物型方程式における非負の進行波解の分類

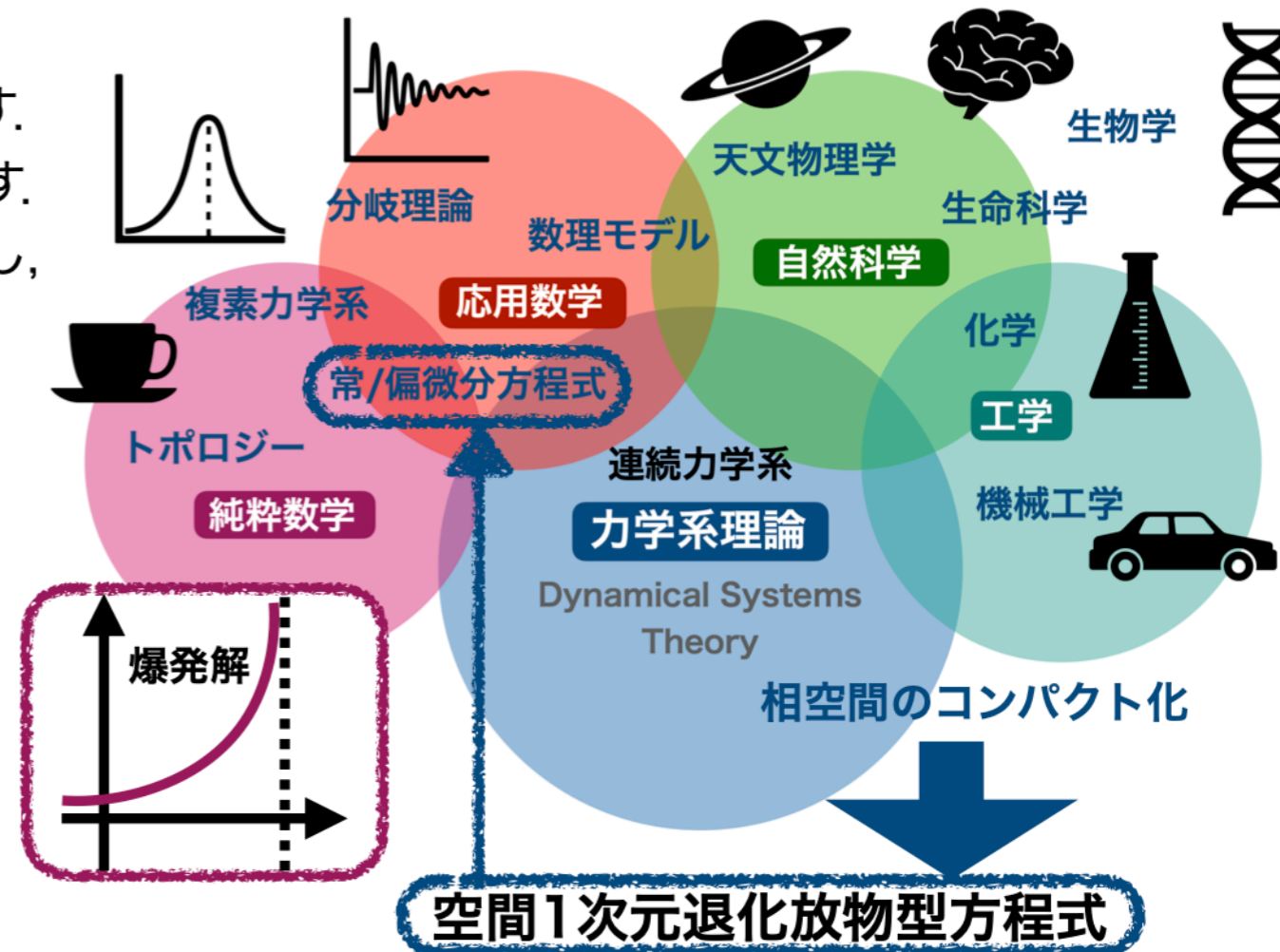
市田 優 (明治大学大学院理工学研究科数学専攻D1 / JSPS Research Fellow)

【自己紹介】

右図に示すように多くの現象は時間とともに変化しています。これらを数学の立場で考えるとき**力学系理論**は大変有用です。私は特に**微分方程式の定性理論**を扱う**連続力学系**を専門とし、この観点から**偏微分方程式がどのような解を持ち、それがどのような性質を持つのか**ということに興味があります。

【本研究の動機と大まかな位置づけ】

本スライドでは多くの現象を由来にもつ方程式を扱います。この方程式は爆発解（有限時間での解の発散、右図にイメージ）を持つことが知られているが、どのように爆発するかという爆発レートは未だわかっていないことが多い現状です。本研究はこれを解明する上で重要な役割を果たすことが知られている**進行波解**という特徴的な解を分類（解の存在・形状・漸近挙動）することを目的とします。



- ・ 解の爆発（有限時間での解の発散, blow-up）
- ・ 有限時間特異性の一種で「いつ、どこで、どのように起こるのか」という疑問のもと数多くの研究が存在

*本研究は科研費（課題番号 21J20035）の助成を受けたものである。

*関連論文 I., Classification of nonnegative traveling wave solutions for the 1D degenerate parabolic equations, submitted.

$$U_t = U^p (U_{xx} + \mu U) - \delta U$$

空間1次元退化放物型方程式

$t > 0, x \in \mathbb{R}, 1 < p \in \mathbb{R}, \mu > 0, \delta = 0 \text{ or } 1$

$\delta = 0$ (下記記載, 文献[1], [2])

- ・由来: 曲線短縮問題, 燃烧熱やプラズマに関連した現象など
- ・古典的曲率流方程式 $V = -\kappa$ から $p = 2$ の場合を導出可能 [3]
- ・数学的問題: 爆発解のより精密な爆発レートの導出
- ・Poon (2019): $x \in (-L, L)$ に制限し, Dirichlet or 周期境界条件を課し, $p \geq 2$ とし, 爆発解のレートの上界と下界を導出
→その際に変数変換により, $\delta = 1$ の場合の方程式を導出し, その進行波解を考慮することにより, その下界を導出している。

[4], [5]の概要

- ①進行波座標により2次元ODE系導出
- ②ポアンカレコンパクト化, 特異点膨らましを組み合わせることでこのODEの無限遠方まで含めたすべてのダイナミクスを調べる
- ③このダイナミクスから対応する進行波解の存在, 形状, 漸近挙動を調べる

- ・I.-Sakamoto [4], I.-Matsue-Sakamoto [5]: $\mu = 1$ $p \in \mathbb{N}$ に制限し, ポアンカレ・コンパクト化と特異点膨らましといった手法を用いることで, すべての進行波解の分類 (偶数の場合のみ存在, 形状, 漸近挙動) を与えている

この課題を解決したいが・・・
特異点膨らましの古典的な結果[6]を見直し実数でも適用可能にする必要

非常に困難が予想される

課題: 特異点膨らましという手法を用いる際に p が自然数である必要があり, 一般的な $p \in \mathbb{R}$ の場合の議論がなされていない

U^p がすべての難しさの根源
では, $u = U^p$ という変換を導入して簡単に・・・

- [1] K. Anada, T. Ishiwata, J. Differential Equations, **262**, 181–271 (2017).
- [2] C.C. Poon, Discrete Contin. Dyn. System. Ser. B, **24**, 5317–5336 (2019).
- [3] 矢崎成俊, 動く曲線の数値計算, 共立出版, 2019.
- [4] I., T.O. Sakamoto, J. Elliptic and Parabolic Equations, **6**, 795-832 (2020).
- [5] I., K. Matsue, T.O. Sakamoto, JSIAM Lett., **12**, 65–68 (2020).
- [6] M. Brunella, M. Miari, J. Differential Equations, **85**, 338–366 (1990).

空間1次元退化放物型方程式 (1)

$$U_t = U^p (U_{xx} + \mu U) - \delta U$$

$$t > 0, x \in \mathbb{R}, 1 < p \in \mathbb{R}, \mu > 0, \delta = 0 \text{ or } 1$$

変換 ([7]) : $u = U^p$ $\gamma = \frac{p-1}{p}, k = \mu p$

空間1次元退化放物型方程式(2)

$$u_t = u u_{xx} - \gamma (u_x)^2 + k u^2 - \delta p u$$

$$t > 0, x \in \mathbb{R}, 0 < \gamma < 1, k > 0, 1 < p \in \mathbb{R}$$

$u = U^p$ の変換を導入したことで p が係数へ

本研究のステップ

- ① 進行波座標により2次元ODE系導出
- ② ポアンカレコンパクト化により, このODEの無限遠方まで含めたすべてのダイナミクスへ
([4]と異なり, 特異点膨らましを用いずに)
→ $p \in \mathbb{R}$ で議論可能に! ([4,5]の一般化へ)
- ③ このダイナミクスから **対応する進行波解の存在, 形状, 漸近挙動** を調べる

ステップ① 進行波座標 : $(\phi \geq 0)$

$$\phi(\xi) = u(t, x), \xi = x - ct, 0 < c \in \mathbb{R}$$

2次元ODE系(3)

p が次数に出現しない

$$\begin{cases} \phi' = \psi, \\ \psi' = -c\phi^{-1}\psi + \gamma\phi^{-1}\psi^2 - k\phi + \delta p, \end{cases} \left(' = \frac{d}{d\xi} \right).$$

平衡点 $E_1 : (\phi, \psi) = (\mu^{-1}, 0)$ ($\delta = 1$)
 $c > 0$ のとき漸近安定, $\mu^2 c^2 - 4k$ で変化
 $\phi = 0$ の特異性解消変換 : $ds/d\xi = \phi^{-1}$

特異性解消後の2次元ODE系(4)

$$\begin{cases} \phi' = \phi\psi, \\ \psi' = -c\psi + \gamma\psi^2 - k\phi^2 + \delta p\phi, \end{cases} \left(' = \frac{d}{ds} \right).$$

*平衡点 ($\delta = 0$)

$$E_0 : (\phi, \psi) = (0, 0), E_2 : (\phi, \psi) = (0, c\gamma^{-1})$$

中心多様体定理により

*平衡点 ($\delta = 1, E_1$ も)

$$E_0 : (\phi, \psi) = (0, 0), E_2 : (\phi, \psi) = (0, c\gamma^{-1})$$

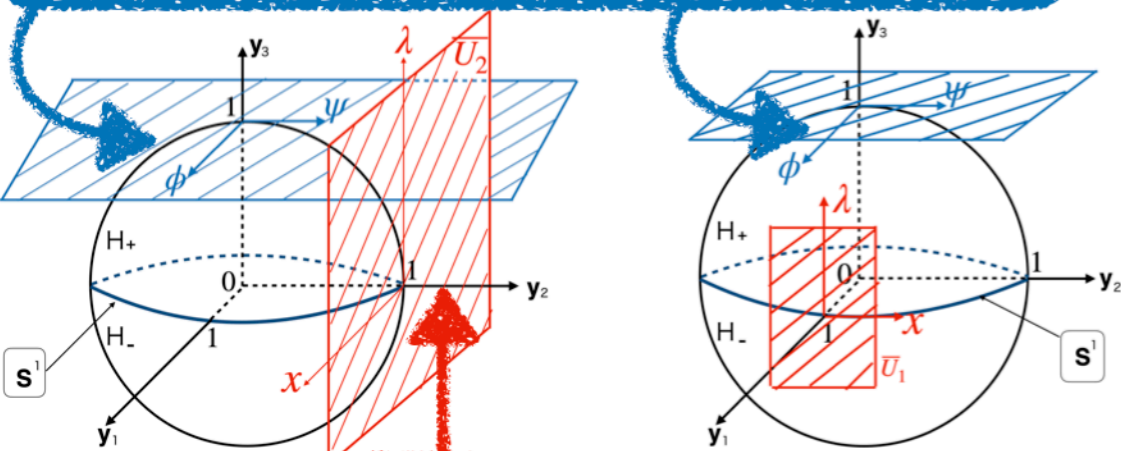
標準形変換+中心多様体定理により

ステップ②

ステップ②を調べるために, 次のスライドでは **ポアンカレ・コンパクト化** について簡単に紹介する

特異性解消後の2次元ODE系(4)

$$\begin{cases} \phi' = \phi\psi, \\ \psi' = -c\psi + \gamma\psi^2 - k\phi^2 + \delta p\phi, \end{cases} \quad \left(' = \frac{d}{ds} \right).$$

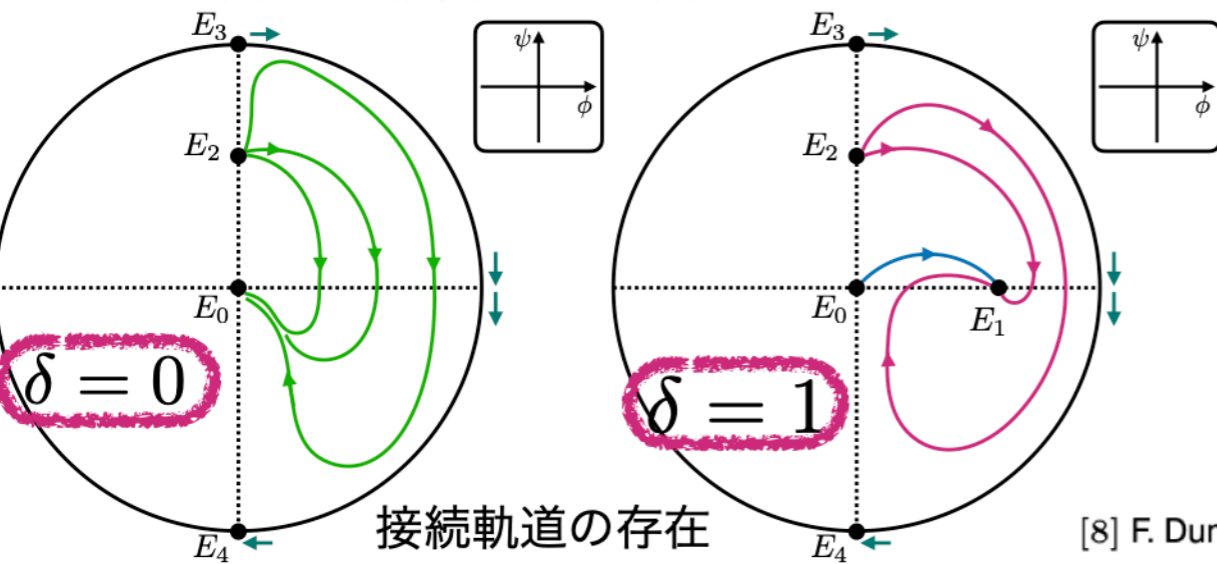


本スライドでは \bar{U}_2 の場合のみ紹介する。他は同様

$$\phi(s) = x(s)/\lambda(s), \quad \psi(s) = 1/\lambda(s) \quad d\tau/ds = \lambda^{-1}$$

$$\begin{cases} \lambda_\tau = c\lambda^2 - \gamma\lambda + k\lambda x^2 - \delta p\lambda^2 x, \\ x_\tau = p^{-1}x + c\lambda x + kx^3 - \delta p\lambda x^2, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{平衡点} \\ E_3 : (\lambda, x) = (0, 0) \\ \rightarrow \text{saddle} \end{matrix}$$

得られるポアンカレ・ディスク (p.3のステップ②完了)



接続軌道の存在

ポアンカレ・コンパクト化の概要 [8]

- **コンパクト化** : 相空間に無限遠方を適切に付け加えてコンパクト多様体を作り, 有界な解として爆発解を含む発散する解を考える方法
- $H_+ = \{y \in S^2 \mid y_3 > 0\}$ (北半球)
- $S^1 = \{y \in S^2 \mid y_3 = 0\}, \|\phi, \psi\| = \infty$ (赤道)
- $U_k = \{y \in S^2 \mid y_k > 0\}$ (球面の分割, V_k : 負に対応)
- $\bar{U}_k = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_k = 1\} \in \mathbb{R}^2$ (局所座標, \bar{V}_k : 反対側)
- $\mathbb{R}^2 \cup \{\|\phi, \psi\| = +\infty\}$: **ポアンカレ・ディスク**
- $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ への射影 :

$$f^\pm(\phi, \psi) = \pm \left(\frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + \psi^2 + 1}}, \frac{\psi}{\sqrt{\phi^2 + \psi^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{\phi^2 + \psi^2 + 1}} \right)$$
- **射影** : $g_k^+ : U_k \rightarrow \bar{U}_k, g_k^- : V_k \rightarrow \bar{V}_k$ ($m < n, m, n \neq k$)

$$g_k^+(y_1, y_2, y_3) = -g_k^-(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_m & y_n \\ y_k & y_k \end{pmatrix}$$
- $k = 2$ の場合, 合成 :

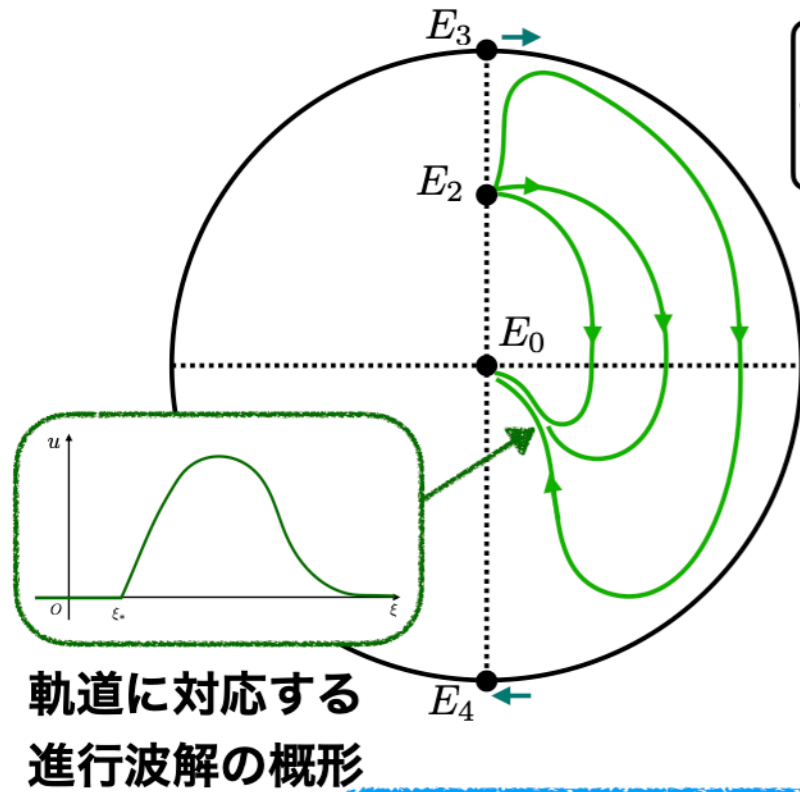
$$(g_2^+ \circ f^+)(\phi, \psi) = \left(\frac{\phi}{\psi}, \frac{1}{\psi} \right) =: (x, \lambda)$$
- \bar{U}_2 への変換式 : $\phi(s) = \frac{x}{\lambda}, \quad \psi(s) = \frac{1}{\lambda}$
- 他の局所座標への変換も同様にして求めることができる

[8] F. Dumortier, J. Llibre, C.J. Artés, Qualitative Theory of Planar Differential Systems, Springer, Berlin (2006).

ステップ③と得られた結果

接続軌道の存在→解の存在

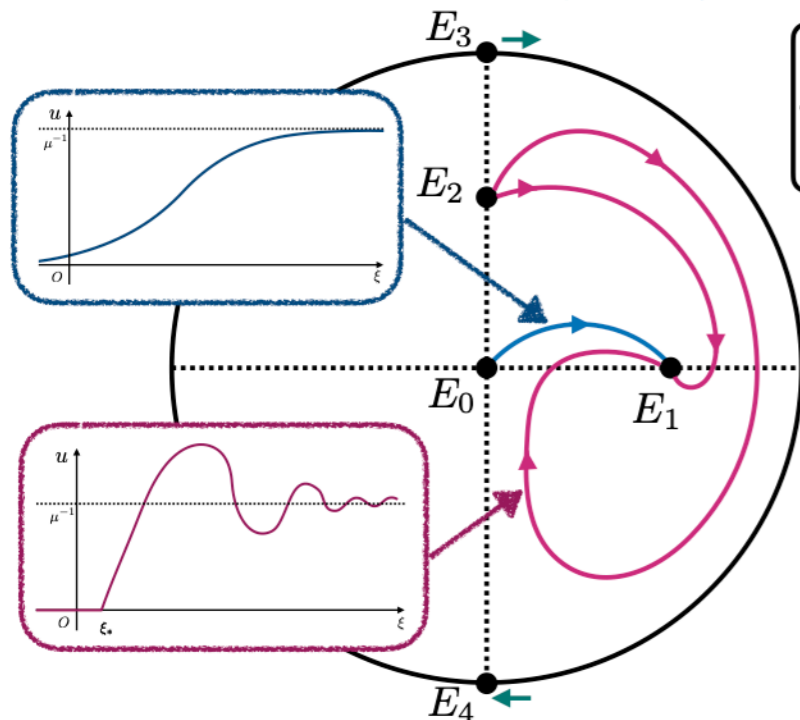
本研究で得られた結果の概略図は以下の通り：



$$\delta = 0$$

- 進行波解の存在 (接続軌道の存在)
- その形状の情報 (力学系理論の結果)
- その漸近挙動 (変数変換を辿ると)

ポアンカレ・ディスク



$$\delta = 1$$

- 上記と同様にして、
- 進行波解の存在
 - 形状に関する情報
 - 漸近挙動

まとめ

$$U_t = U^p(U_{xx} + \mu U) - \delta U$$

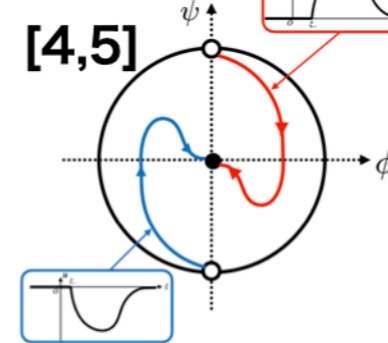
$$t > 0, x \in \mathbb{R}, 1 < p \in \mathbb{R}, \mu > 0$$

$$\rightarrow u_t = u^p(u_{xx} + u)$$

$$\rightarrow v_\tau = v^p(v_{xx} + v - v^{-p+1})$$

先行研究

[4,5]



$$\begin{cases} U(\xi) \sim C(\xi - \xi_*)^{\frac{1}{p}}, \\ U_\xi(\xi) \sim C(\xi - \xi_*)^{-\frac{p-1}{p}} \end{cases} \text{ as } \xi \searrow \xi_* + 0$$

$$\begin{cases} U(\xi) \sim \left(\frac{p}{c}\xi\right)^{-\frac{1}{p}}, \\ U_\xi(\xi) \sim -\frac{1}{p}\left(\frac{p}{c}\right)^{-\frac{1}{p}}\xi^{-\frac{p+1}{p}}, \end{cases} \text{ as } \xi \rightarrow +\infty$$

1 < p ∈ ℝ

“還元”

先行研究の結果に一致し、しかも一般的な結果へ

本研究

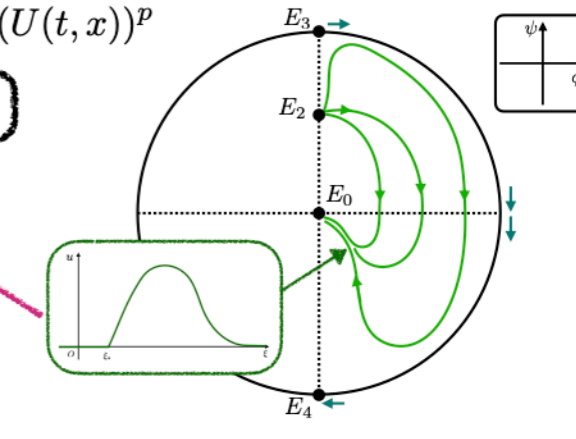
$$u_t = uu_{xx} - \gamma(u_x)^2 + ku^2 - \delta pu$$

$$t > 0, x \in \mathbb{R}, 1 < p \in \mathbb{R}, k = \mu p,$$

$$0 < \gamma < 1, \gamma = (p-1)/p$$

$$u(x, t) = (U(t, x))^p$$

δ = 0



特異性を持つ弱進行波解の存在
形状に関する情報, 漸近挙動

$$\begin{cases} u(\xi) \sim C(\xi - \xi_*), \\ u_\xi(\xi) \sim \frac{\gamma}{c}, \end{cases} \text{ as } \xi \searrow \xi_* + 0$$

$$\begin{cases} u(\xi) = \phi(\xi) \sim \frac{c}{k}\xi^{-1}, \\ u_\xi(\xi) = \psi(\xi) \sim -\frac{c}{k}\xi^{-2}, \end{cases} \text{ as } \xi \rightarrow +\infty$$

- 本研究では先行研究[4,5]で仮定されていた $p \in \mathbb{N}$ という制限を外すために $u = U^p$ という変換を導入した。そしてそこでの結果を還元することで一般化へ
- 無限遠方までのダイナミクスをステップ②で調べたことによりすべての非負の進行波解を分類（存在性, 形状, 漸近挙動）を与えた。
- 特にこのタイプの進行波解しかないことがわかる
- 今後の爆発解の精密な爆発レート導出への貢献が期待